Dissertação de Mestrado
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Pernambuco

Alguns Métodos na Teoria das Funções Univalentes

Hilário Alencar da Silva

Recife - Brasil

Dissertação submetida ao corpo Docente do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para obtenção do Grau de Mestre em Ciências.

Alguns Métodos na Teoria das Funções Univalentes

Universidade Federal de Pernanbuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Cidade Universitária - Tel. 227-2388
Recife - Brasil
-1980-

Aos meus pais, Hilário e Raquel.

Este trabalho foi realizado sob a orientação do Prof. Mauriso Alves, a quem agradecemos por sua compreensiva e inestimável ajuda em momentos decisivos.

Agradecemos ao colega Sinvaldo Gama, Prof. Ruidival Soares e, em especial, ao Prof. Caitano Cintra.

No período de elaboração desta dissertação contamos com o apoio financeiro da Universidade Católica de Pernambuco e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Finalizando, agradecemos a Delza Cavalcanti Xavier Lima pelo seu excelente trabaho datilográfico.

Sumário

Introdução

Apresentaremos no §1 do Capítulo 1, o método que foi desenvolvido em 1964 por Milin, utilizando a Desigualdade de Grunsky ([15], Teorema 3.2) para obter várias estimativas dos coeficientes de uma função univalente. No §2 deste capítulo, usaremos o método acima, para obter estimativas dos coeficientes de uma função ímpar em S (Teorema 1.2.2) e, como consequência provamos a Conjectura de Bieberbach para funções em S com restrição ao segundo coeficiente.

No capítulo II fazendo uso do Método de Milin, provaremos a Conjectura de Pommerenke (Teorema 2.0.9). Esta Conjectura não é verdadeira para a classe S ([15], Corolário 6.1).

No capítulo III introduziremos as funções disjuntas (Definição 3.1.1), limitadas (Definição 3.2.1) e Bieberbach-Eilenberg (Definição 3.2.4). Provaremos também o Teorema 3.1.2, que é uma generalização do Teorema da Área ([15], Teorema 1.3). Em seguida, utilizando este teorema obteremos estimativas dos coeficientes destas funções.

Capítulo 1

Método de Milin e Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos um método para aplicar a Desigualdade de Grunsky [15] ao problema dos ecoeficientes de uma função univalente, o qual foi desenvolvido inicialmente por Milin [11]. A dificuldade quanto ao uso da Desigualdade de Grunsky, é que obtemos informações principalmente acerca do logarítimo de $[g(\xi) - g(z)]/(\xi - z)$, embora necessitemos informações sobre a diferença, quociente e sua recíproca. Este obstáculo foi contornado pelos resultados obtidos por Lebedev e Milin, os quais permitem obter estimativas para os coeficientes de uma função univalente, a partir desta e de seu logarítimo.

1.1 Definições e Lemas

Sejam $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ dados e seja $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ definida formalmente pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, z^k\right]. \tag{1.1.1}$$

Assim $\beta_o = 1$ e, derivando formalmente (1.1.1), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n z^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k z^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n.$$

Comparando os coeficientes da igualdade acima, obtemos recursivamente a seguinte fórmula:

$$\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \alpha_k \beta_{n-k}, \quad n = 1, 2 \ldots . \tag{1.1.2}$$

O exemplo a seguir será o caso extremo nos três primeiros lemas seguintes.

Exemplo 1. Consideramos $\alpha_k = k^{-1} c^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ com $|c| \leq 1$. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \, z^n = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \, c^k \, z^k \right] = \exp \left[\log \frac{1}{1 - cz} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n$$

e, comparando os coeficientes, concluímos que

$$\beta_n = c^n, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Lema 1.1.1. *Sejam*

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \exp \left[\sum_{k+1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k+1)}{n+1} \, |\alpha_k|^2 \right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \tag{1.1.3}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ *e* $\sigma_o = 1$. *Então,*

$$\sigma_n \leq \sigma_{n-1} \leq 1, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.1.4}$$

A igualdade $\sigma_n = 1$ *ocorre para algum* $n \geq 1$ *se, e somente se,* $\alpha_k = k^{-1} c^k$ *para* $k = 1, 2, \ldots, n$ *e* $|c| = 1$.

Demonstração. Aplicando a Desigualdade de Schwarz em (1.1.2), obtemos

$$|\beta_n|^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \, |\alpha_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |\beta_{n-k}|^2, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.1.5}$$

A substituição $n - k = \mathrm{v}$ em (1.1.5) acarreta

$$|\beta_n|^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \, |\alpha_k|^2 \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2. \tag{1.1.6}$$

Tendo em vista que

$$\sum_{\mathrm{v}=0}^{n} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 = \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 + |\beta_n|^2$$

e (1.1.6), temos

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{v}=0}^{n} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 &\leq \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2 \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \\ &= \left[1 + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2.\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Usando (1.1.7) juntamente com o fato de que $x \leq e^{x-1}$ para todo x real, deduzimos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\sum_{\mathrm{v}=0}^{n} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 &\leq \frac{1}{n+1}\left[1 + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \\ &\leq \frac{1}{n}\exp\left[\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2 - 1\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\mathrm{v}=0}^{n} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \leq \frac{1}{n}\exp\left[-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por

$$\exp\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k+1)}{n+1}\,|\alpha_k|^2\right],$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\sigma_n \quad \leq \quad & \frac{1}{n} \exp\left[-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2\right] \\
& \exp\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k+1)}{n+1} \left|\alpha_k\right|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \\
= \quad & \frac{1}{n} \exp\left[-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\right. \\
& \left. -\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k+1)}{n+1} \left|\alpha_k\right|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \\
= \quad & \frac{1}{n} \exp\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2|\alpha_k|^2}{n(n+1)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k+1)}{n+1}\right. \\
& \left. |\alpha_k|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \\
= \quad & \frac{1}{n} \exp\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2 - kn^2 + nk^2 - kn}{n(n+1)} \left|\alpha_k\right|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \\
= \quad & \frac{1}{n} \exp\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(kn-k^2)(n+1)}{n(n+1)} \left|\alpha_k\right|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 \\
= \quad & \frac{1}{n} \exp\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} \left|\alpha_k\right|^2\right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 = \sigma_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Fica assim provada (1.1.4), pois por definição $\sigma_0 = 1$.

A igualdade $\sigma_n = 1$ ocorre para algum $n \geq 1$ se, e somente se, tivermos igualdade em (1.1.5) para $k = 1, 2, \ldots, n$ e

$$
\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2
$$

for raiz da equação $x = e^{x-1}$. A última condição dá imediatamente que $|\alpha_k| = k^{-1}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, e a igualdade em (1.1.5) nos conduz a $\alpha_k = k^{-1}c^k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ com $|c| = 1$. Com efeito, a igualdade em (1.1.5) equivale a afirmar que para algum $n \geq 1$, existe c_n tal que

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{n}\alpha_1 &= c_n\,\overline{\beta}_{n-1} \\
\tfrac{1}{n}2\alpha_2 &= c_n\,\overline{\beta}_{n-2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\tfrac{1}{n}(n-1)\alpha_{n-1} &= c_n\,\overline{\beta}_1 \\
\alpha_n &= c_n\,\overline{\beta}_0.
\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Como $|\alpha_k| = k^{-1}$, façamos $\alpha_1 = c$ com $|c| = 1$; usando o processo de indução finita e (1.1.8) temos

$$\frac{1}{n}\,(n-1)\,\frac{c^{n-1}}{n-1} = c_n\,\overline{\beta}_1$$

desde que $\alpha_{n-1} = \dfrac{c^{n-1}}{n-1}$ para algum $n \geq 2$. Visto que $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = c$ por (1.1.2) e $\alpha_n = c_n$ por (1.1.8), deduzimos que

$$\frac{1}{n}\,c^{n-1} = \alpha_n\overline{c},$$

ou seja,

$$\alpha_n = \frac{c^n}{n}, \text{ pois } |c| = 1.$$

□

Denotando por $c = 0,57721\cdots$ a constante de Eüler, sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \log\left(n + \frac{1}{2}\right) + c, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.1.9}$$

De (1.1.3), (1.1.4) e (1.1.9) deduzimos que

$$\sum_{\mathrm{v}=0}^{n} |\beta_{\mathrm{v}}|^2 < \exp\left[\sum_{k=1}^{n} k\,|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2 + 1 - c\right], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.1.10}$$

De fato,

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \exp \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k+1)}{n+1} \left|\alpha_k\right|^2 \right] \sum_{\mathrm{v}=0}^{n} \left|\beta_{\mathrm{v}}\right|^2 \leq 1,$$

donde

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathrm{v}=0}^{n} \left|\beta_{\mathrm{v}}\right|^2 &\leq (n+1) \exp \left[\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) \left|\alpha_k\right|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \right] \\
&= (n+1) \exp \left[\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k(n+1) \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \right] \\
&= (n+1) \exp \left[\sum_{k=1}^{n} k \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 \right] \\
&\qquad \exp \left[- \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} + 1 \right] \\
&= (n+1) \exp \left[\sum_{k=1}^{n} k \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 \right] \\
&\qquad \exp \left[- \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + 1 \right] \\
&< (n+1) \exp \left[\sum_{k=1}^{n} k \left|\alpha_k\right|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left|\alpha_k\right|^2 \right] \\
&\qquad \exp \left[- \log \left(n+1+\tfrac{1}{2} \right) + 1 - c \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n+1)\exp\left[\sum_{k=1}^{n} k\,|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2 + 1 - c\right]\frac{1}{n+3/2} \\
&< \exp\left[\sum_{k=1}^{n} k\,|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k^2\,|\alpha_k|^2 + 1 - c\right].
\end{aligned}
$$

Lema 1.1.2 (Desigualdade de Lebedev-Milin)**.** *Se* σ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *é definida por* (1.1.3)*, então*

$$
\begin{aligned}
|\beta_n|^2 &\leq \sigma_{n-1}\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right] \\
&\leq \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right], \quad n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
\tag{1.1.11}
$$

A igualdade ocorre para algum $n \geq 1$ se, e somente se, $\alpha_k = k^{-1}\,c^k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ e $|c| = 1$.

Demonstração. Usando (1.1.6), (1.1.3), o fato de que $x \leq e^{x-1}$ para todo x real e, finalmente (1.1.4), obtemos

$$
\begin{aligned}
|\beta_n|^2 &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2\,\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{v}=0}^{n-1}|\beta_{\mathrm{v}}|^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2\,\sigma_{n-1}\exp\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}|\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right] \\
&\leq \sigma_{n-1}\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2 - 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}|\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right] \\
&= \sigma_{n-1}\exp\left[\sum_{k=1}^{n} k|\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} - 1\right] \\
&= \sigma_{n-1}\exp\left[\sum_{k=1}^{n} k|\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right] \leq \exp\left[\sum_{k=1}^{n} k|\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right].
\end{aligned}
$$

A demonstração da condição de igualdade é análoga à prova da parte do Lema 1.1.1. □

Fazendo uso de (1.1.9), obtemos de (1.1.11) que

$$\begin{aligned}
|\beta_n|^2 &< \exp\left[\sum_{k=1}^{n} k\,|\alpha_k|^2 - \log n - \log(1+1/2n) - c\right] \\
&= \exp\left[\sum_{k=1}^{n} k\,|\alpha_k|^2 - c\right] \exp\left[-\log n\right] \exp\left[-\log(1+1/2n)\right] \\
&= \exp\left[2\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\,|\alpha_k|^2 - \frac{c}{2}\right)\right] \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+1/2n} \\
&< \exp\left[2\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\,|\alpha_k|^2 - \frac{c}{2}\right)\right] \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

assim deduzimos a seguinte desigualdade:

$$|\beta_n| < \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\,|\alpha_k|^2 - \frac{c}{2}\right], \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.1.12}$$

Além disso, desde que $\sigma_{n-1} \leq \sigma_1$ para $n = 2, 3, \ldots$ e $\beta_1 = \alpha_1$ por (1.1.2), também obtemos de (1.1.11) e (1.1.3) que, para $n = 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
|\beta_n|^2 &\leq \sigma_{n-1} \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\left(k\,|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right] \\
&\leq \sigma_1 \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\left(k\,|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\exp\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|\alpha_1|^2\right](1+|\alpha_1|^2)\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\left(k\,|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$|\beta_n|^2 \leq \frac{1}{2}(1+|\alpha_1|^2)\exp\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}|\alpha_1|^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right] \tag{1.1.13}$$

para $n = 2, 3, \ldots$.

Lema 1.1.3. *Se* $\beta_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *e* $\alpha_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *são definidos por* (1.1.1)*, então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2 \leq \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2\right], \tag{1.1.14}$$

desde que o membro direito da desigualdade acima convirja. A igualdade ocorre para $\alpha_k = k^{-1}\, c^k \quad (|c| < 1)$ e $\beta_n = c^n$.

Demonstração. Aplicando a Desigualdade de Schwarz em (1.1.2), obtemos

$$\begin{aligned} |\beta_n| &\leq \sum_{k=1}^{n} \left| k\, \alpha_k\, \beta_{n-k}\, \frac{1}{n} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |k\, \alpha_k\, \beta_{n-k}|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} k^2\, |\alpha_k|^2\, |\beta_{n-k}|^2\, \frac{1}{n} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$n|\beta_n|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} k^2\, |\alpha_k|^2\, |\beta_{n-k}|^2, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.1.15}$$

Sejam $\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, |\alpha_k|^2\, x^k$ e $\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2\, x^n$ com $x \in [0, 1)$. Derivando $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, e usando (1.1.15), temos que $\beta'(x) \leq \alpha'(x)\beta(x)$. De fato,

$$\begin{aligned} \alpha'(x)\beta(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, |\alpha_k|^2\, x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2\, |\alpha_{n+1}|^2\, x^n \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2\, x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2\, |\alpha_{k+1}|^2\, |\beta_{n-k}|^2 \right] x^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \, |\alpha_{k+1}|^2 \, |\beta_{n-1-k}|^2 \right] x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} k^2 \, |\alpha_k|^2 \, |\beta_{n-k}|^2 \right] x^{n-1} \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \, x^{n-1} = \beta'(x).
\end{aligned}
$$

Como $\alpha(0) = 0$ e $\beta(0) = 1$, segue-se que

$$
\log \beta(x) = \int_0^x \frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)} \, d\xi \leq \int_0^x \alpha'(\xi) \, d\xi = \alpha(x),
$$

ou seja,

$$
\beta(x) \leq \exp \alpha(x).
$$

Portanto,

$$
\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2 \, x^n \leq \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} k \, |\alpha_k|^2 \, x^k \right]
$$

e obtemos (1.1.14) fazendo $x \to 1^-$.

A prova da condição de igualdade é imediata. Com efeito, para $\alpha_k = k^{-1} \, c^k$ $(|c| < 1)$ e $\beta_n = c^n$ vemos que

$$
\begin{aligned}
\exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} k \, |\alpha_k|^2 \right] &= \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c^k|^2}{k} \right] = \exp \left[\log \frac{1}{1 - |c|^2} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |c^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2.
\end{aligned}
$$

□

Definição 1.1.4. Denotamos por $\sum$ a classe das funções

$$
g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, z^{-n},
$$

que são analíticas e univalentes em $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, exceto para um polo simples no infinito com resíduo um.

Definiremos agora os polinômios de Faber e enunciaremos a Desigualdade de Grunsky. Para maiores detalhes ver [15].

Sejam

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^{-n} \tag{1.1.16}$$

pertencente a $\sum$ e $w \in \mathbb{C}$ fixo. A função $\log[\xi^{-1}(g(\xi) - w)]$ é analítica para valores grandes de $|\xi|$ e se anula no infinito por (1.1.16). Logo, podemos escrever sua expansão em torno do infinito como sendo:

$$\log \frac{g(\xi) - w}{\xi} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \phi_n(w)\, \xi^{-n} \quad (w \in \mathbb{C}, |\xi| \quad \text{grande}). \tag{1.1.17}$$

Derivando (1.1.17) com relação a ξ e pondo $\phi_0(w) \equiv 1$, obtemos que

$$\frac{\xi}{g(\xi) - w} \cdot \frac{\xi\, g'(\xi) - (g(\xi) - w)}{\xi^2} = \frac{g'(\xi)}{g(\xi) - w} - \frac{1}{\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(w) \xi^{-(n+1)},$$

donde

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(w)\ \xi^{-(n+1)}. \tag{1.1.18}$$

Substituindo a expansão (1.1.16) em (1.1.18), vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n b_n\, \xi^{-(n+1)}}{\xi + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \xi^{-n} - w} &= \xi^{-1} \cdot \frac{\xi - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n b_n\, \xi^{-n}}{\xi + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \xi^{-n} - w} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(w)\, \xi^{-(n+1)} \\
&= \xi^{-1} + \xi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(w) \xi^{-n}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\xi - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n\, \xi^{-n} = \left[\xi + (b_0 - w) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \xi^{-n}\right] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(w)\, \xi^{-n}\right]$$

e comparando os coeficientes, obtemos $\phi_1(w) = w - b_0$ e recursivamente a seguinte fórmula:

$$\phi_{n+1}(w) = (w-b_0)\phi_n(w) - \sum_{\mathrm{v}=1}^{n-1} b_{n-\mathrm{v}}\phi_{\mathrm{v}}(w) - (n+1)b_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Segue-se por indução que $\phi_n(w)$ é um polinômio de grau n da forma

$$\phi_n(w) = (w - b_0)^n - nb_1(w - b_0)^{n-2} + \ldots, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Chamamos $\phi_n(w)$ o enésimo *Polinômio de Faber* de $g(z)$.

Introduziremos agora os coeficientes de Grunsky.

Podemos escrever

$$\log \frac{g(z) - g(\xi)}{z - \xi} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell} z^{-k} \xi^{-\ell} \, (|z| > R, |\xi| > R), \qquad (1.1.19)$$

porque $g(z) \neq g(\xi)$ $(z \neq \xi)$ e $g'(z) \neq 0$ em $\{|z| > R, |\xi| > R\}$. Deste modo, a função do membro esquerdo de (1.1.19) é analítica neste domínio. O sinal negativo é por conveniência.

Denominamos $b_{k\ell}$ $(k, \ell = 1, 2, \ldots)$ os *coeficientes de Grunsky* da função $g(z)$. É claro que $b_{k\ell} = b_{\ell k}$.

Fazendo $w = g(z)$ em (1.1.17), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\log \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z} &= \log \left[\frac{g(\xi) - g(z)}{\xi} \, \frac{\xi}{\xi - z} \right] \\
&= \log \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi} + \log \frac{\xi}{\xi - z} \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \, \phi_k \left(g(z) \right) \xi^{-k} + \log \frac{1}{1 - z/\xi} \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \, \phi_k \left(g(z) \right) \xi^{-k} - \log \left(1 - \frac{z}{\xi} \right) \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \, \phi_k \left(g(z) \right) \xi^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \, z^k \, \xi^{-k},
\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\log \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\phi_k \left(g(z) \right) - z^k \right] \xi^{-k}. \tag{1.1.20}$$

Por (1.1.19) e (1.1.20) obtemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\phi_k \left(g(z) \right) - z^k \right] \xi^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell} z^{-\ell} \xi^{-k},$$

ou seja,

$$\phi_k(g(z)) = z^k + k \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell} z^{-\ell}, \quad |z| > R. \tag{1.1.21}$$

Como $\phi_1(w) = w - b_0$, segue-se de (1.1.21) que

$$b_{k1} = b_{1k} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.1.22}$$

Desigualdade de Grunsky. *Se $g \in \sum$ e $\lambda_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell} \, \lambda_\ell \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{k},$$

desde que a última série convirja.

Para demonstração ver [15], Teorema 3.2.

Lema 1.1.5. *Se $g \in \sum$ e $E = \mathbb{C} \setminus g(\Delta)$, então*

$$\max_{w \in E} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} |\phi_k(w)|^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 1,248 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.1.23}$$

e

$$\max_{w \in E} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} |\phi_k(w)|^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 0,752 \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{1.1.24}$$

Demonstração. Seja $|z| = r > 1$. Desde que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, obtemos de (1.1.21) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}|\phi_k(g(z))|^2 &= \frac{1}{k}\left| z^k + k \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ z^{-\ell} \right|^2 \\ &\leq 2\ \frac{1}{k}\ |z|^{2k} + 2k\ \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ z^{-\ell} \right|^2, \end{aligned}$$

donde

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ |\phi_k(g(z))|^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ |z|^{2k} + 2 \sum_{k=1}^{n} k \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ z^{-\ell} \right|^2 .$$

Fazendo $\lambda_k = z^{-k}$ na Desigualdade de Grunsky, deduzimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ z^{-\ell} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{-2k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\ r^{-2k} = \log \frac{1}{1 - r^{-2}},$$

pois $|z| = r$. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ |\phi_k(g(z))|^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ r^{2k} + 2\ \log \frac{1}{1 - r^{-2}}. \tag{1.1.25}$$

Com $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ e $x = \log r > 0$, podemos escrever a expressão à direita da desigualdade (1.1.25) como

$$2h_n + 4 \int_0^x \frac{e^{2n\tau} - 1}{e^{2\tau} - 1}\ e^{2\tau}\ d\tau + 2\ \log \frac{1}{1 - e^{-2x}},$$

pois

$$4 \int_0^x \frac{e^{2n\tau} - 1}{e^{2\tau} - 1}\ e^{2\tau}\ d\tau = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ r^{2k} - 2h_n.$$

Visto que $e^{2\tau} - 1 \geq 2\tau e^{\tau}$ $(\tau \geq 0)$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
& 2h_n + 4 \int_0^x \frac{e^{2n\tau} - 1}{e^{2\tau} - 1}\ e^{2\tau}\ d\tau + 2\ \log \frac{1}{1 - e^{-2x}} \\
\leq\ & 2h_n + 4 \int_0^x \frac{e^{2n\tau} - 1}{2\tau e^{\tau}}\ e^{2\tau}\ d\tau + 2\ \log \frac{1}{2x \cdot e^{-x}} \\
=\ & 2h_n + 2 \int_0^x \frac{e^{(2n+1)\tau} - e^{\tau}}{\tau}\ d\tau - 2\ \log(2x) + 2x \\
=\ & 2h_n + 2 \int_0^x \frac{e^{(2n+1)\tau} - e^{\tau} - 1 + 1 + \tau - \tau}{\tau}\ d\tau + 2x + 2\ \log \frac{1}{2x} \\
=\ & 2h_n + 2 \int_0^x \frac{e^{(2n+1)\tau} - 1}{\tau}\ d\tau + 2 \int_0^x \frac{1 - e^{\tau} + \tau}{\tau}\ d\tau - 2 \int_0^x d\tau \\
& +2x + 2\ \log \frac{1}{2x} \\
=\ & 2h_n + 2 \int_0^x \frac{e^{(2n+1)\tau} - 1}{\tau}\ d\tau - 2 \int_0^x \left[\frac{e^{\tau} - 1 - \tau}{\tau}\right]\ d\tau + 2\ \log \frac{1}{2x}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} |\phi_k(g(z))|^2 \quad \leq \quad & 2h_n + 2 \int_0^x \frac{e^{(2n+1)\tau} - 1}{\tau}\ d\tau \\
& -2 \int_0^x \left[\frac{e^{\tau} - 1 - \tau}{\tau}\right] + 2\ \log \frac{1}{2x}.
\end{aligned} \tag{1.1.26}$$

Por (1.1.19), temos que

$$\log\left(n + \frac{1}{2}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - c = h_n - c.$$

Agora, fazendo $x = \dfrac{\xi}{2n+1}$, vemos que

$$\begin{aligned} 2\ \log \frac{1}{2x} &= 2\ \log \frac{2n+1}{2\xi} = 2\ \log \left[\frac{n}{\xi} + \frac{1}{2\xi}\right] \\ &= 2\ \log \left[\frac{1}{\xi}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] = 2\ \log \frac{1}{\xi} + 2\ \log \left[n + \frac{1}{2}\right] \\ &= -2\ \log \xi + 2\ \log \left[n + \frac{1}{2}\right] < -2\ \log \xi + 2h_n - 2c \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

e

$$2\int_0^x \frac{e^{(2n+1)\tau} - 1}{\tau}\, d\tau = 2\int_0^\xi \frac{e^t - 1}{t}\, dt, \text{ onde } t = (2n+1)\tau. \tag{1.1.28}$$

Deduzimos de $\displaystyle\int_0^x \frac{e^\tau - 1 - \tau}{\tau}\, d\tau \geq 0$, (1.1.26), (1.1.27) e (1.1.28) que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} |\phi_k(g(z))|^2 \leq 4h_n + 2\int_0^\xi \frac{e^t - 1}{t} dt - 2\log\ \xi - 2c. \tag{1.1.29}$$

Uma ótima escolha para ξ é $\log 2$, pois $\xi = \log 2$ torna mínimo o valor da expressão à direita de (1.1.29), e, portanto, a integral pode ser calculada consultando uma tabela.

Desde que $\phi_k(w)$ é analítica, $|\phi_k(w)|$ é subharmônica em $\mathbb{C}$ e $E \subset \mathbb{C} \setminus \{g(z) : |z| > r\}$; o Princípio do Máximo para funções subharmônicas e (1.1.29) mostram que

$$\max_{w \in E} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ |\phi_k(w)|^2 \leq \max_{|z|=r} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ |\phi_k(g(z))|^2 \leq 4h_n + 1,248.$$

Fazendo uma simples mundaça no início da demonstração anterior, provamos (1.1.24). De fato,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\ |\phi(g(z))|^2 \leq 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\ |z|^{2k} + 2\ \sum_{k=2}^{n} k \left|\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ z^{-\ell}\right|^2$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ |z|^{2k} - 2\ |z|^2 + 2\ \sum_{k=1}^{n} k \left|\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ z^{-\ell}\right|^2$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ r^{2k} - 2 + 2\ \log \frac{1}{1-r^{-2}} \quad \text{para} \quad |z| > 1 \text{ e } n = 2, 3, \ldots$$

Segue-se o resultado exatamente como na demonstração de (1.1.23).

A seguir, fazendo uso do Método de Milin, provaremos *Conjectura de Bieberbach* para uma subclasse de S. □

1.2 Conjectura de Bieberbach para um subclasse de S

Definição 1.2.1. Seja $S = \{f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots : f$ é analítica e injetiva em $D\}$ a classe de funções univalentes normalizadas.

"Univalentes" porque se f está em S, então f é analítca e injetiva em D, onde $D = \{z \in \mathbb{C} : |Z| < 1\}$; "normalizadas" porque se f está em S, então $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

Conjectura de Bieberbach. Se $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ está em S, então

$$|a_n| \leq n \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

e ocorre a igualdade se, e somente se,

$$f(z) = f_\theta(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

A função $f_\theta(z)$ é chamada uma rotação da função de Koebe:

$$f_0(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Consideremos a subclasse de S, constituída das funções univalentes ímpares

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}\ z^{2n+1}, \quad |z| < 1. \tag{1.2.1}$$

Teorema 1.2.2. *Se $f(z)$ é uma função ímpar em S, então*

$$|a_{2n+1}| < 1,17, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.2.2}$$

Se, além disso, $|a_3| < 0,525$, então

$$|a_{2n+1}| < 1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.2.3}$$

Demonstração. Desde que $f(z)$ é ímpar e univalente, a função definida por $g(\xi) = \left[f \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right]^{-2}$ pertence a $\sum$ ([15], Lema 1.2). Por (1.2.1) e pela expressão (1.1.17) com $w = 0$ temos

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\ a_{2n+1}\ z^n = \frac{f(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \left[\frac{g(z^{-1})}{z^{-1}}\right]^{-1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\phi_k(0) z^k\right].$$

Portanto, a relação (1.1.1) é satisfeita com

$$\alpha_k = \frac{1}{2k}\phi_k(0), \quad \beta_n = a_{2n+1} \quad (n, k = 1, 2, \ldots) \tag{1.2.4}$$

e, em particular, $\alpha_1 = \beta_1 = a_3$ por 1.1.2. Consequentemente, pelo Lema 1.1.2, vemos que

$$|a_{2n+1}|^2 \leq \exp\left[\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ |\phi_k(0)|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right].$$

Desde que $0 \in E$, pois $g(\xi)$ não se anula para $|\xi| > 1$, obtemos por (1.1.23) que

$$\frac{1}{4}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ |\phi_k(0)|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1,248}{4}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Logo,

$$|a_{2n+1}|^2 \leq \exp\left[\frac{1,248}{4}\right] = \exp 0,312 < (1,17)^2$$

para $n = 1, 2, \ldots$, obtendo (1.2.2).

Deduzimos de (1.1.13) e (1.2.4) que

$$
\begin{aligned}
|a_{2n+1}|^2 \leq \frac{1}{2}(1+|a_3|^2)\exp\Bigg[&\frac{1-|a_3|^2}{2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&|\phi_k(0)|^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Bigg] \text{ para } n = 2, 3, \ldots .
\end{aligned} \tag{1.2.5}
$$

Como $\frac{1}{2}\ \phi_1(0) = a_3$ por (1.2.4), segue-se de (1.1.24) que

$$\frac{1}{4}\ \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\ |\phi_k(0)|^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{0,752}{4} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 0,188,$$

donde

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ |\phi_k(0)|^2 \quad &\leq \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{4}\ |\phi_1(0)|^2 - 0,188 \\
&= \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + |a_3|^2 - 0,188.
\end{aligned}
$$

Portanto, por (1.2.5) temos que

$$|a_{2n+1}|^2 \leq \frac{1}{2}(1+|a_3|^2)\ \exp\ \left[\frac{1}{2}(1+|a_3|^2) - 0,188\right],$$

e como $|a_3| < 0,525$, obtemos (1.2.3). □

As demonstrações de (1.2.2) e (1.2.3) foram obtidas, respectivamente, por Milin [10] e Aharonov [2].

Observe que não é possível provar (1.2.2) com 1 em vez de $1,17$. De fato, Fekete e Szegö em 1933 ([15], Corolário 6.1) mostraram a existência de uma função ímpar em S com

$$|a_5| = \frac{1}{2} + e^{-2/3} \simeq 1,013.$$

Corolário 1.2.3 ([2]). *Se* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *pertence a* S *e* $|a_2| < 1,05$*, então*

$$|a_n| < n, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Demonstração. Defina

$$f^*(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \sum_{k=1}^{\infty} a^*_{2k+1}\ z^{2k+1}, \tag{1.2.6}$$

a qual é uma função ímpar em S ([15], Lema 1.2).

Por (1.2.6) temos

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^*_{2n+1}\ a^*_{2n-2k-1}, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{1.2.7}$$

Em particular,

$$a_2 = \sum_{k=0}^{1} a^*_{2k+1}\ a^*_{3-2k} = a^*_1\ a^*_3 + a^*_3\ a^*_1 = 2a^*_3,$$

pois $a^*_1 = 1$ por (1.2.6).

Aplicando a Desigualdade de Schwarz em (1.2.7), deduzimos que

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \left[\sum_{k=0}^{n-1} |a^*_{2k+1}|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |a^*_{2n-2k-1}|^2\right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} |a^*_{2k+1}|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |a^*_{2k+1}|^2\right]^{1/2} = \sum_{k=0}^{n-1} |a^*_{2k+1}|^2. \end{aligned}$$

Como $|a_2| < 1,05$, ou seja,

$$|a^*_3| = \frac{|a_2|}{2} < \frac{1,05}{2} = 0,525,$$

segue-se de (1.2.3) que

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a^*_{2k+1}|^2 = |a^*_1|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} |a^*_{2k+1}|^2 < n.$$

Logo $|a_n| < n$ $(n = 2, 1, \cdots)$, se $f \in S$ e $|a_2| < 1,05$. □

Capítulo 2

Coeficientes sucessivos de funções estreladas

Pretendemos mostrar neste capítulo a prova de uma conjectura feita por Pommerenke ([14], Problema 3.5), a saber:

$$||a_{n+1}| - |a_n|| \leq 1$$

para toda função

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \ z^n$$

pertencente a subclasse de S, constituída de funções estreladas (Definição 2.2). Esta conjectura foi provada recentemente por Yuk Leung [8].

Definição 2.0.4. Denotamos por $\mathcal{P}$ a classe de funções

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \ z^n,$$

que são analíticas e de partes reais positivas em D.

Definição 2.0.5. Dizemos que uma função $f(z) = z + a_2 \ z^2 + \ldots$ é estrelada em D, se a função é univalente em D, e se $F = f(D)$ é estrelado com respeito a origem, isto é, se $w \in F$ implica que $tw \in F$, $0 \leq t \leq 1$. Denotamos por S^* a subclasse de S constituída de funções estreladas.

Para provarmos a *Conjectura de Pommerenke*, necessitamos dos dois seguintes lemas:

Lema 2.0.6. *Uma função analítica $f(z)$ pertence a S^* se, e somente se, $p(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ pertence a $\mathcal{P}$.*

Para demonstração ver [15], *Teorema* 2.5.

Lema 2.0.7. [9] *Seja $p \in \mathcal{P}$, e seja $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais não negativos, tal que*

$$q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \ p_n \ z^n$$

é analítica em D. Se $Re\ q(z) \leq M$ para todo z pertencente a D, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \ |p_n|^2 \leq 2M.$$

Demonstração. Sejam $u(r,\theta) = Re\ p(re^{i\theta})$, $v(r,\theta) = Re\ q(re^{i\theta})$ com $0 < r < 1$ e $p_n = c_n + id_n$. Então,

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= Re\ \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + id_n)r^n \ e^{in\theta}\right\} \\
&= Re\ \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + id_n)r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)\right\} \\
&= Re\ \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \ \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n\right. \\
&\qquad \left. +i\sum_{n=1}^{\infty} r^n(d_n \cos n\theta + c_n \operatorname{sen} n\theta)\right\} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
v(r,\theta) &= Re\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(c_n+id_n)r^n\ e^{in\theta}\right\}\\
&= Re\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n\ c_n+i\lambda_n\ d_n)(\cos n\theta+i\,\mathrm{sen}\,n\theta)r^n\right\}\\
&= Re\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n\ c_n\cos_n\theta-\lambda_n\ d_n\,\mathrm{sen}\,n\theta\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+i(\lambda_n\ d_n\cos n\theta+\lambda_n\ c_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)\right]r^n\right\}\\
&= Re\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\ (c_n\cos_n\theta-d_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)r^n\right.\\
&\quad \left.+i\sum_{n=1}^{\infty}(d_n\cos n\theta+c_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)\lambda_n r^n\right\}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(c_n\cos n\theta-d_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)r^n.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta-d_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)r^n\\
v(r,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\ (c_n\cos n\theta-d_n\,\mathrm{sen}\,n\theta)r^n.
\end{aligned}
\tag{2.0.1}
$$

Desde que as duas séries de (2.0.1) convergem absolutamente e uniformemente em $[0,2\pi]$, multiplicamos e integramos termo a termo estas séries para obter:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} u(r,\theta)v(r,\theta)d\theta \quad &= \quad \int_0^{2\pi} \left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n\right] \\
& \left[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \ (c_n \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n\right] d\theta \\
&= \quad \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \ (c_n \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n\right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n \\
& \left.\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \ (c_n \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n\right] d\theta \\
&= \quad \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \ (c_n \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n\right] d\theta \\
& + \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n\right. \\
& \left.\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \ (c_n \cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n\right] d\theta.
\end{aligned}
$$

Como

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} n\theta \cos m\theta \ d\theta = \int_0^{2\pi} \cos n\theta \ d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} n\theta \ d\theta = 0$$

e

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \ d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \ d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq n \\ \pi, & \text{se} \quad m = n \end{cases} ,$$

temos que

$$\int_0^{2\pi} u(r,\theta)v(r,\theta)d\theta = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(c_n^2+d_n^2)r^{2n} = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|p_n|^2r^{2n}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|p_n|^2r^{2n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)v(r,\theta)d\theta.$$

Desde que $u(r,\theta) > 0$ (por definição) e $v(r,\theta) \leq M$ (por hipótese), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|p_n|^2r^{2n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)v(r,\theta)d\theta \leq \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)d\theta \\
&= \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta - d_n \operatorname{sen} n\theta)r^n\right]d\theta \\
&= 2M.
\end{aligned}$$

Portanto, segue-se o resultado desejado quando fazemos $r \to 1^-$. □

Corolário 2.0.8. *Para todo p pertencente a $\mathcal{P}$ e todo inteiro positivo n, existe ξ com $|\xi| = 1$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|p_k-\xi^k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Demonstração. Aplicando o Lema 2.0.7 à função

$$q(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}p_kz^k,$$

deduzimos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|p_k-\xi^k|^2 &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(p_k-\xi^k)(\overline{p}_k-\overline{\xi}^k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left[p_k\ \overline{p}_k - p_k\ \overline{\xi}^k - \xi^k\ \overline{p}_k + \xi^k\ \overline{\xi}^k\right]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|\xi|^{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|p_k|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(p_k\ \overline{\xi}^k+\overline{p}_k+\xi^k).\end{aligned}$$

Desde que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ (p_k\ \overline{\xi}^k+\overline{p}_k\xi^k) = 2\ Re\ \left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ p_k-\overline{\xi}^k\right\} = 2\ Re\ [q(\overline{\xi})],$$

segue-se então

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ |p_k-\xi^k|^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|p_k|^2 - 2\ Re\ [q(\overline{\xi})] + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ |\xi|^{2k}$$

e, escolhendo ξ com $|\xi|=1$ tal que

$$Re\ [q(\overline{\xi})] = M = \max\ Re\ [q(z)],$$

temos:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ |p_k-\xi^k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

$\square$

Teorema 2.0.9 (Conjectura de Pommerenke)**.** *Para toda função* $f(z) = z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\ z^n$ *pertencente a* S^**, temos que*

$$||a_{n+1}|-|a_n|| \leq 1, \quad n=1,2,\cdots.$$

A igualdade ocorre para algum n *se, e só se,* $f(z)$ *é uma função da forma*

$$\frac{z}{(1-cz)(1-\xi z)}$$

para algum c *e* ξ *com* $|c|=|\xi|=1$*.*

Demonstração. Se $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \, z^n$ pertence a S^*, então pelo Lema 2.0.6

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = p(z)$$

para alguma $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \, z^k$ pertencente a $\mathcal{P}$. Definamos

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 1, & \text{se} \quad z = 0 \end{cases},$$

onde g é obviamente analítica em D. Assim,

$$\frac{d}{dz} \log[g(z)] = \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{zf'(z) - f(z)}{zf(z)} = \frac{p(z) - 1}{z},$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{d}{dt} \, \log\, [g(t)] \, dt &= \log \, \frac{f(z)}{z} = \int_0^z \frac{p(t) - 1}{t} \, dt \\ &= \int_0^z t^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \, t^k \, dt \\ &= \int_0^z \left[\sum_{k=1}^{\infty} p_k \, t^{k-1} \right] dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \, p_k \, z^k. \end{aligned}$$

Para $|\xi| = 1$,

$$\begin{aligned} \log\left[(1-\xi z)\frac{f(z)}{z}\right] &= \log(1-\xi z) + \log\frac{f(z)}{z} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\ \xi^k\ z^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\ p_k\ z^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\ (p_k-\xi^k)z^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\ z^k,\ \text{onde } \alpha_k = \frac{1}{k}\ (p_k-\xi^k). \end{aligned} \tag{2.0.2}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (1-\xi z)\frac{f(z)}{z} &= \frac{f(z)}{z} - \xi f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\ z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\xi a_n\ z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-\xi a_n)z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\ z^n,\ \text{onde } \beta_n = a_{n+1}-\xi a_n, \end{aligned} \tag{2.0.3}$$

$$a_0 = 0 \text{ e } a_1 = 1.$$

Por (2.0.2) e (2.0.3) obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\ z^n = \exp\left[\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_k\ z^k\right], \tag{2.0.4}$$

que é a relação (1.1.1) com $\alpha_k = \dfrac{1}{k}(p_k-\xi^k)$ e $\beta_n = a_{n+1}-\xi a_n$. Portanto, aplicando a Desigualdade de Lebedev-Milin (Lema 1.1.2), obtemos que

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \xi a_n|^2 &\leq \exp\left[\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{k}(p_k - \xi^k)\right|^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right] \\ &= \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|p_k - \xi^k|^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]. \end{aligned} \tag{2.0.5}$$

Pelo Corolário 2.0.8, podemos escolher ξ com $|\xi| = 1$ para fazermos o expoente da expressão à direita de (2.0.5) não positivo. Portanto,

$$|a_{n+1} - \xi a_n| \leq 1. \tag{2.0.6}$$

Desde que $||a_{n+1}| - |a_n|| \leq |a_{n+1} - \xi a_n|$ para todo ξ com $|\xi| = 1$, obtemos por (2.0.6) a desigualdade desejada

$$||a_{n+1}| - |a_n|| \leq 1.$$

Se $||a_{n+1}| - |a_n|| = 1$, então ocorre a igualdade em (2.0.5) para algum ξ; o que nos conduz a igualdade em (1.1.11). Logo,

$$\alpha_k = \frac{c^k}{k} \quad \text{com} \quad |c| = 1 \quad \text{e} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.0.7}$$

Por (2.0.7) e (2.0.4) temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \; z^n = \exp\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{c^k}{k} \; z^k + 0 \; (z^{n+1})\right]. \tag{2.0.8}$$

Igualando os coeficientes de Taylor em ambos os membros de (2.0.8), obtemos

$$\beta_k = c^k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ou seja,

$$a_{k+1} = \xi a_k + c^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \;\; \text{e} \;\; |c| = 1. \tag{2.0.9}$$

Por um simples argumento indutivo mostra-se que

$$a_{k+1} = \frac{c^{k+1} - \xi^{k+1}}{c - \xi}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

e pondo $e^{i\theta} = \dfrac{\xi}{c}$, temos que

$$a_{k+1} = \frac{c^{k+1} - c^{k+1} \cdot e^{i\theta(k+1)}}{c - ce^{i\theta}} = \frac{c^{k+1}(1 - e^{i\theta(k+1)})}{c(1 - e^{i\theta})},$$

ou seja,

$$|a_{k+1}| = \left| \frac{1 - e^{i(k+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right|, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.0.10}$$

Portanto, a afirmação de que $||a_{n+1}| - |a_n|| = 1$ nos conduz a

$$\left| \left| \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| - \left| \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \right| = 1,$$

donde

$$||1 - e^{i(n+1)\theta}| - |1 - e^{in\theta}|| = |1 - e^{i\theta}|. \tag{2.0.11}$$

Em geral, temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} ||1 - e^{i(n+1)\theta}| - |1 - e^{in\theta}|| &\leq |(1 - e^{i(n+1)\theta}) - (1 - e^{in\theta})| \\ &= |e^{i(n+1)\theta} - e^{in\theta}| = |e^{in\theta}(e^{i\theta} - 1)|, \end{aligned}$$

isto é,

$$||1 - e^{i(n+1)\theta}| - |1 - e^{in\theta}|| \leq |1 - e^{i\theta}|,$$

com igualdade ocorrendo somente quando os dois vetores

$$v_{n+1} = 1 - e^{i(n+1)\theta} \ \text{ e } \ v_n = 1 - e^{in\theta}$$

forem colineares. Como v_{n+1} e v_n são não colineares para qualquer que seja n e satisfazem a igualdade (2.0.11), temos três casos a considerar:

1º caso: $\theta = 0$, isto é, $v_{n+1} = v_n = 0$;

2º caso: $v_n = 0$;

3º caso: $v_{n+1} = 0$.

No primeiro caso, quando $\theta = 0$, obtemos $\xi = c$. Consequentemente,

$$|a_2| = |\xi + c| = 2|c| = 2.$$

Como $|a_2| = 2$ se, e somente se,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \ z^n$$

for uma rotação da função de Koebe $\dfrac{z}{(1-z)^2}$ ([15], Teorema 1.5), segue-se o resultado desejado. Para estudar o segundo caso, necessitamos introduzir algumas definições juntamente com um lema.

Definição 2.0.10. Denominamos V^*_{k+1} a região de dimensão $2k$, constituída de todos os pontos $(a_2, a_3, \ldots, a_{k+1})$ com $z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \ z^k$ pertencente a S^*

Definição 2.0.11. Fixados $a_2, a_3, \ldots, a_k$, seja $C^*_{k+1} = C^*_{k+1}(a_2, \ldots, a_k)$ a seção transversal de dimensão dois de V^*_{k+1} na qual a_{k+1} varia.

Lema 2.0.12. *Seja $(a_2, a_3, \ldots, a_{k+1})$ pertencente a V^*_{k+1}. Se $(a_2, a_3, \ldots, a_{k+1})$ está na fronteira de V^*_{k+1}, então $C^*_{k+2}(a_2, \ldots, a_{k+1})$ consiste de um único ponto.*

Para demonstração ver [3], Teorema 1.

No segundo caso, quando $v_n = 0$, deduzimos de (2.0.10) e (2.0.9) que $a_n = 0$ e $|a_{n+1}| = 1$. Portanto, temos que $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, 0, a_{n+1})$ está necessariamente na fronteira de V^*_{n+1}, pois, caso contrário, teríamos

$$(\rho a_2, \rho a_3, \cdots, \rho a_{n-1}, 0, \rho a_{n+1}) \in V^*_{n+1} \text{ para algum } \rho > 1.$$

Isto é impossível, porque obteríamos $||\rho a_n| - |\rho a_{n+1}|| = \rho > 1$, o que contradiz a primeira parte do Teorema 2.0.9. Logo, pelo Lema 2.0.12, obtemos um *único* ponto $(a_2, \ldots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}) \in V^*_{n+2}$. Como $z + \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{c^k \xi^k}{c - \xi} \ z^k \in S^*$ [4] temos então

$$a_{n+2} = \frac{c^{n+2} - \xi^{n+2}}{c - \xi}.$$

Podemos repetir o argumento acima para mostrar que

$$(a_2, \ldots, a_{n-1}, 0, a_{n+1}, a_{n+2})$$

está na fronteira de V^*_{n+2} e obter, em geral, que

$$a_{n+j} = \frac{c^{n+j} - \xi^{n+j}}{c - \xi} \text{ para todo } j \text{ inteiro positivo.}$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n - \xi^n}{c - \xi}\, z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cz)^n}{c-\xi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi z)^n}{c-\xi} = \frac{1}{c-\xi} \sum_{n=1}^{\infty} (cz)^n \\
&\quad - \frac{1}{c-\xi} \sum_{n=1}^{\infty} (\xi z)^n \\
&= \frac{1}{c-\xi} \cdot \frac{cz}{1-cz} - \frac{1}{c-\xi} \cdot \frac{\xi z}{1-\xi z} = \frac{z}{(1-cz)(1-\xi z)}.
\end{aligned}$$

Logo, a função neste caso tem a forma

$$\frac{z}{(1-cz)(1-\xi z)}.$$

Similarmente, o mesmo resultado para o 3° caso. □

Deduziremos dois resultados imediatos do Teorema 2.0.9. O primeiro é bastante conhecido, e foi obtido por Löwner (1917). O segundo devido ao Privalov (1924).

Corolário 2.0.13. *Para toda função* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, z^n$ *pertencente a* S^*,

$$|a_n| \leq n, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{2.0.12}$$

Demonstração. O resultado $|a_2| \leq 2|$ é bastante conhecido e foi provado por Bieberbach em 1916 ([15], Teorema 1.5).

Suponhamos que $|a_n| \leq n$. Logo, pelo Teorema 2.0.9

$$|a_{n+1}| \leq 1 + |a_n| \leq 1 + n.$$

Assim, obtivemos (2.0.12) por indução. □

Corolário 2.0.14. *Para toda função ímpar* $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}\, z^{2n+1}$ *pertencente a* S^**, temos*

$$|a_{2n+1}| \leq 1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.0.13}$$

Demonstração. Temos pelo Teorema 2.0.9 que

$$|a_{k+1}| - |a_k| \leq 1, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Pondo $k = 2n$, deduziremos que

$$|a_{2n+1}| - |a_{2n}| \leq 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Desde que $a_{2n} = 0$ par $n = 1, 2, \ldots$, pois $f \in S^*$ e é ímpar, obtemos (2.0.13). $\square$

Capítulo 3

Algumas subclasses de funções univalentes

Apresentaremos neste capítulo uma generalização da Desigualdade de Grunsky, no que diz respeito a inclusão de mais informações acerca da função $g \in \sum$ (Definição 1.1.1). Em seguida, fazendo uso desta generalização, obteremos algumas estimativas para os coeficientes das funções dos seguintes tipos: disjuntas, limitadas e Bieberbach - Eilenberg.

3.1 Funções univalentes disjuntas

Definição 3.1.1. Dizemos que duas funções são disjuntas, se suas imagens são disjuntas.

Consideremos o par

$$\begin{aligned} f(z) &= a_1\, z + a_2\, z^2 + \ldots,\ a_1 \neq 0,\ z \in D \\ g(\xi) &= \xi + b_0 + b_1\, \xi^{-1} + \ldots, \xi \in \Delta \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

de funções univalentes disjuntas, isto é, assumiremos que

$$f(D) \cap g(\Delta) = \emptyset.$$

Definimos $b_{k\ell}$ $(k, \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ por

$$\log\ \frac{g(z) - g(\xi)}{z - \xi} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ z^{-k}\ \xi^{-\ell},\ |z| > 1,\ |\xi| > 1, \tag{3.1.2}$$

$$\log\ \frac{g(\xi)-f(z)}{\xi} = -\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty}\ b_{-k,\ell}\ z^k\ \xi^{-\ell},\ |z|<1<|\xi|, \qquad (3.1.3)$$

$$\log\ \frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi} = -\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{\ell=0}^{\infty}\ b_{-k,-\ell}\ z^k\ \xi^{\ell},\ |z|<1,\ |\xi|<1 \qquad (3.1.4)$$

e por $b_{k,-\ell} = b_{-\ell,k}$, $k \geq 1$, $\ell \geq 0$. Assim,

$$b_{k\ell} = b_{\ell k}, \quad , k,\ell = 0, \pm 1, \ldots . \qquad (3.1.5)$$

É claro que as três séries duplas de potências convergem nos seus respectivos domínios se, e somente se, as funções (3.1.1) são univalentes e disjuntas. Os números $b_{k\ell}$ para $k,\ell = 1,2,\ldots$ são os *coeficientes de Grunsky* de $g(\xi) \in \sum$, os quais foram introduzidos no primeiro parágrafo do Capítulo 1. Os números $b_{-k,-\ell}$ para $k,\ell = 1,2,\ldots$ são os *coeficientes de Grunsky* da função $\dfrac{a_1}{f(\xi^{-1})} \in \sum$. Além disso, como $f(0) = 0$, segue-se de (3.1.3) e (3.1.4) que

$$\log\ \frac{\xi}{g(\xi)} = \sum_{\ell=1}^{\infty}\ b_{0\ell}\ \xi^{-\ell} = -b_0\ \xi^{-1} + \left(-b_1 + \frac{1}{2}\ b_0^2\right)\xi^{-2} + \ldots \qquad (3.1.6)$$

e

$$\begin{aligned}\log\ \frac{z}{f(z)} \quad = \quad & \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{0,-\ell}\ z^{\ell} = -\log\ a_1 - \frac{a_2}{a_1}\ z \\ & + \left(-\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2^2}{2a_1^2}\right) z^2 + \ldots \quad \text{para } |z|<1<|\xi|.\end{aligned} \qquad (3.1.7)$$

Obtemos de (1.1.17), (3.1.3) e (3.1.5) que

$$\phi_k(f(z)) = k\ \sum_{\ell=0}^{\infty}\ b_{k,-\ell}\ z^{\ell}, \quad k = 1,2,\ldots . \qquad (3.1.8)$$

De fato,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\ \phi_k(f(z))\ \xi^{-k} &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{-\ell,k}\ z^{\ell}\ \xi^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{-\ell,k}\ z^{\ell}\ \xi^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{k,-\ell}\ z^{\ell}\right]\xi^{-k}, \quad k=1,2,\dots.\end{aligned}$$

O próximo teorema é uma generalização do Teorema da Área ([15], teorema 1.3) e foi obtido por Hummel [5]. Versões mais fracas foram obtidas por Nehari (1953), Lebedev (1961), Jenkins (1965) e Alenicyn (1966); também para um número arbitrário de funções disjuntas, Kühnau (1968) e Aharonov (1973) obtiveram resultados.

Teorema 3.1.2. *Sejam*

$$f(z) = a_1\ z + a_2\ z^2 + \dots,\ z \in D \ \text{ e } \ g(\xi) = \xi + b_0 + b_1\ \xi^{-1} + \dots,\ \xi \in \Delta$$

funções univalentes e disjuntas, e seja $F = \mathbb{C} \setminus [f(D) \cup g(\Delta)]$. *Sejam* λ_k $(-m \le k \le m,\ m = 1, 2, \dots)$ *números complexos não todos nulos. Então,*

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=-m}^{m} b_{k\ell}\ \lambda_\ell\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=-m}^{m} b_{-k,\ell}\ \lambda_\ell\right|^2 \\ &\le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}(|\lambda_k|^2 + |\lambda_{-k}|^2) + 2\ Re\ \left[\overline{\lambda}_0 \sum_{\ell=-m}^{m} b_{0\ell}\ \lambda_\ell\right],\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

e ocorre a igualdade se, e somente se, a área de F for igual a zero.

Demonstração. Dividiremos a prova em duas etapas.

(a) Denotemos por $\phi_k(w)$ e $\phi_{-k}(w)$, respectivamente, os polinômios de Faber das funções $g(\xi)$ e $\dfrac{a_1}{f(\xi^{-1})}$ em $\sum$. Seja

$$h(w) = -\lambda_0\ \log w + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k}\ \phi_k(w) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k}\ \phi_{-k}\ \left(\frac{a_1}{w}\right). \tag{3.1.10}$$

Segue-se de (3.1.7), (3.1.8), (3.1.5) e do fato de

$$\phi_{-k}\ \left(\frac{a_1}{f(z)}\right) = z^{-k} + k\ \sum_{\ell=1}^{\infty}\ b_{-k,-\ell}\ z^{\ell} \quad (|z|<1)$$

por (1.1.21) que

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= h(f(z)) \\
&= -\lambda_0 \log(f(z)) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k}\phi_k(f(z)) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k}\phi_{-k}\left(\frac{a_1}{f(z)}\right) \\
&= -\lambda_0 \log z + \lambda_0 \log \frac{z}{f(z)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k}\ \phi_k\ (f(z)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda - k}{k}\phi_{-k}\left(\frac{a_1}{f(z)}\right) \\
&= -\lambda_0 \log z + \lambda_0 \sum_{\ell=0}^{\infty}\ b_{0,-\ell} z^{\ell} + \sum_{k=1}^{m}\ \lambda_k \sum_{\ell=0}^{\infty}\ b_{k,-\ell} z^{\ell} + \sum_{k=1}^{m} \\
&\quad \frac{\lambda_{-k}}{k}\left(z^{-k} + k\sum_{\ell=1}^{\infty}\ b_{-k,-\ell} z^{\ell}\right) \\
&= -\lambda_0 \log z + \lambda_0 \sum_{\ell=0}^{\infty}\ b_{0,-\ell} z^{\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty}\ \left(\sum_{k=1}^{m}\ \lambda_k b_{k,-\ell}\right) z^{\ell} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m}\ \frac{\lambda_{-k}}{k} z^{-k} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\ \left(\sum_{k=1}^{m}\ \lambda_{-k} b_{-k,-\ell}\right) z^{\ell} \\
&= -\lambda_0 \log z + \sum_{k=1}^{m}\ \frac{\lambda_{-k}}{k} z^{-k} + \lambda_0 b_{00} + \lambda_0 \sum_{\ell=1}^{\infty}\ b_{0,-\ell} z^{\ell} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m}\ \lambda_k b_{k0} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\ \left(\sum_{k=1}^{m}\ \lambda_k b_{k,-\ell}\right) z^{\ell} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{m}\ \lambda_{-k} b_{-k,-\ell}\right] z^{\ell}
\end{aligned}$$

$$= \quad -\lambda_0 \log z + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k} z^{-k} + \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \; b_{k0} + \sum_{\ell=1}^{\infty}$$

$$\left[\sum_{k=1}^{m} \lambda_k b_{k,-\ell} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{-k} b_{-k,-\ell} + \lambda_0 \; b_{0,-\ell} \right] z^{\ell}$$

$$= \quad -\lambda_0 \log z + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k} z^{-k} + \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \; \lambda_{k0} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\sum_{k=-m}^{m} b_{k,-\ell} \lambda_k \right] z^{\ell}$$

$$= \quad -\lambda_0 \log z + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k} z^{-k} + \sum_{\ell=0}^{m} b_{0\ell} \lambda_\ell + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{\ell=-m}^{m} b_{-k,\ell} \lambda_\ell \right] z^{k}.$$

Portanto,

$$\varphi(z) = h(f(z)) = -\lambda_0 \log z + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k} \; z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \; z^k \quad (3.1.11)$$

para $|z| < 1$, onde

$$\alpha_k = \sum_{\ell=-m}^{m} \; b_{-k,\ell} \; \lambda_\ell \; (k = 1, 2, \ldots) \;\; \text{e} \;\; \alpha_0 = \sum_{\ell=0}^{m} \; b_{0\ell} \lambda_\ell. \quad (3.1.12)$$

De maneira análoga, obtemos de (3.1.6), (3.1.5), (1.1.21) e do fato de

$$\phi_{-k} \; \left(\frac{a_1}{g(\xi)} \right) = k \; \sum_{\ell=1}^{\infty} \; b_{-k,\ell} \; \xi^{-\ell} - k \; b_{-k,0} \quad (|\xi| > 1)$$

por (1.1.17) que

$$\begin{aligned}
\psi(\xi) &= h(g(\xi)) = -\lambda_0 \log(g(\xi)) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k}\ \phi_k(g(\xi)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k}\ \phi_{-k}\left(\frac{a_1}{g(\xi)}\right) \\
&= -\lambda_0 \log \xi + \lambda_0 \log \frac{\xi}{g(\xi)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k}\ \phi_k(g(\xi)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k}\ \phi_{-k}\left(\frac{a_1}{g(\xi)}\right) \\
&= -\lambda_0 \log \xi + \lambda_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{0\ell}\ \xi^{-\ell} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k}\ \left[\xi^k + k \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ \xi^{-\ell}\right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k}\ \left[k \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{-k,\ell}\ \xi^{-\ell} - k\ b_{-k,0}\right] \\
&= -\lambda_0 \log \xi + \lambda_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{0\ell}\ \xi^{-\ell} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k}\ \xi^k \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\ b_{k\ell}\right] \xi^{-\ell} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\ \left[\sum_{k=1}^{m} b_{-k,\ell}\lambda_{-k}\right] \xi^{-\ell} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{m} b_{-k,0}\lambda_{-k} \\
&= -\lambda_0 \log \xi + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k}\ \xi^k + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{m} b_{k\ell}\ \lambda_k + b_{0\ell}\ \lambda_0 \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=1}^{m} b_{-k,\ell}\ \lambda_{-k}\right] \xi^{-\ell} - \sum_{k=1}^{m} b_{-k,0}\ \lambda_{-k}
\end{aligned}$$

$$= \quad -\lambda_0 \log \xi + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} \xi^k + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\sum_{k=-m}^{m} b_{k\ell} \; \lambda_k \right] \xi^{-\ell}$$

$$-\sum_{k=1}^{m} b_{-k,0} \; \lambda_{-k}$$

$$= \quad -\lambda_0 \log \xi + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} \xi^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{\ell=-m}^{m} b_{k\ell} \; \lambda_\ell \right] \xi^k$$

$$-\sum_{\ell=1}^{m} b_{0,-\ell} \; \lambda_{-\ell}.$$

Logo,

$$\psi(\xi) = h(g(\xi)) = -\lambda_0 \; \log \xi + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} \xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \; \xi^{-k} \quad (3.1.13)$$

para $|\xi| > 1$, onde

$$\beta_k = \sum_{\ell=-m}^{m} b_{k\ell} \; \lambda_\ell \; (k = 1, 2, \ldots) \text{ e } \beta_0 = -\sum_{\ell=1}^{m} b_{0,-\ell} \; \lambda_{-\ell}. \quad (3.1.14)$$

(b) Aplicaremos a Fórmula de Green ([15], Teorema 1.2) à função $h(w)$, que é analítica em $\mathbb{C}$ menos um "corte" de 0 a ∞, e integraremos ao longo da curva $C = -A + T + B(-T)$ (Fig.3.1.1). Onde

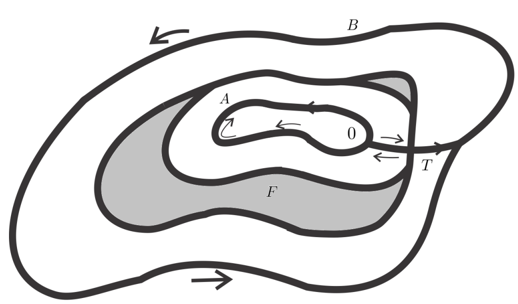

Figura 3.1.1

$A = \{f(z) : |z| = r\}$ $(r < 1)$, $B = \left\{g(\xi) : |\xi| = \dfrac{1}{r}\right\}$ e T é um arco "suave" de Jordan, que liga os pontos $f(r)$ e $g(r^{-1})$, sem contudo interceptar A e B. Ponhamos

$$H(r) = (\mathbb{C}\backslash\{f(z) : |z| \leq r\})\backslash g(\xi) : |\xi| \geq r^{-1}\} \quad (0 < r < 1). \tag{3.1.15}$$

O índice da curva C é dado por $\mathcal{X}(C, w) = 1$ para $w \in H(r)\backslash T$ e $\mathcal{X}(C, w) = 0$ em caso contrário. Assim, aplicando a Fórmula de Green, vemos que

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{H(r)\backslash T} |h'(w)|^2 \, d\Omega = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \overline{h(w)} \, h'(w) \, dw$$

$$= \quad -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{A} \overline{h} \, h' \, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{B} \overline{h} \, h' \, dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T\cup(-T)} \overline{h} \, h' \, dw.$$

Para o cálculo da última integral, podemos considerar sem perda de generalidade, o arco T como sendo um segmento sobre o eixo real (Fig. 3.1.2).

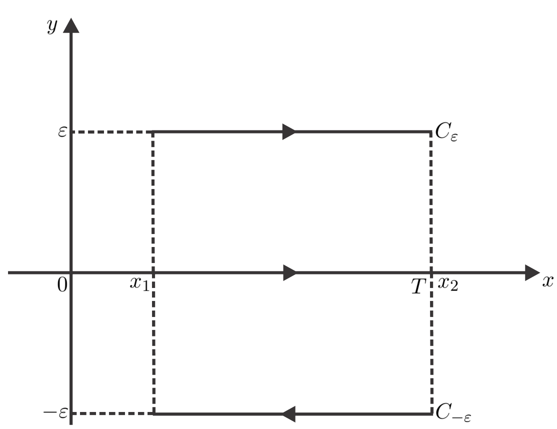

Figura 3.1.2

Como

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(t) &= x_1 + t(x_2 - x_1) + i\varepsilon, \\ C_{-\varepsilon}(t) &= x_2 + t(x_1 - x_2) - i\varepsilon, \quad (0 \le t \le 1) \\ C^-_{-\varepsilon}(t) &= x_1 + t(x_2 - x_1) + i\varepsilon \end{aligned}$$

e por (3.1.10)

$$h(w) = -\lambda_0 \ \log w + \tilde{\varphi}(w),$$

onde

$$\tilde{\varphi}(w) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} \ \phi_k(w) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k} \ \phi_{-k} \ \left(\frac{a_1}{w}\right),$$

deduzimos que

$$\int\limits_{T\cup(-T)} \overline{h(w)} \ h'(w) \ dw$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int\limits_{C_\varepsilon} \overline{h(w)} \ h'(w) \ dw + \int\limits_{C_{-\varepsilon}} \overline{h(w)} \ h'(w) \ dw \right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int\limits_{C_\varepsilon} \overline{h(w)} \ h'(w) \ dw - \int\limits_{C^-_{-\varepsilon}} \overline{h(w)} \ h'(w) \ dw \right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_0^1 \overline{h(C_\varepsilon(t))} \ h'(C_\varepsilon(t)) \ \frac{dC_\varepsilon}{dt} \ dt - \int_0^1 \overline{h(C^-_{-\varepsilon}(t))} \right. \\ &\quad \left. h'(C^-_{-\varepsilon}(t)) \ h'(C^-_{-\varepsilon}(t)) \frac{dC^-_{-\varepsilon}}{dt} \ dt \right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^1 \left[\overline{-\lambda_0\ \log(C_\varepsilon(t))+\tilde{\varphi}\ (C_\varepsilon(t))}\right] h'(C_\varepsilon(t))\ \frac{dC_\varepsilon}{dt}\ dt\right.\\
&\quad \left. -\int_0^1 \left[\overline{-\lambda_0\ \log(C^-_{-\varepsilon}(t)){+}\tilde{\varphi}\ (C^-_{-\varepsilon}(t))}\right] h'(C^-_{-\varepsilon}(t))\ \frac{dC^-_{-\varepsilon}}{dt}\ dt\right\}\\
&= \int_0^1 \left[\overline{-\lambda_0\ \log|x_1+t(x_2-x_1)|+\tilde{\varphi}(x_1+t(x_2-x_1))}\right]\\
&\quad h'(x_1+t(x_2-x_1))(x_2-x_1)\ dt\\
&\quad -\int_0^1 \left[\overline{-\lambda_0\ \log|x_1+t(x_2-x_1)|-2\pi i\ \lambda_0}\right.\\
&\quad \left.\overline{+\tilde{\varphi}(x_1+t(x_2-x_1))}\right] h'(x_1+t(x_2-x_1))(x_2-x_1)\ dt\\
&= \int_0^1 \left[\overline{-\lambda_0\ \log|x_1+t(x_2-x_1)|+\tilde{\varphi}(x_1+t(x_2-x_1)}\right.\\
&\quad \left.\overline{-\lambda_0\ \log|x_1+t(x_2-x_1)|+2\pi i\ \lambda_0-\tilde{\varphi}(x_1+t(x_2-x_1)}\right]\\
&\quad (x_2-x_1)\ h'(x_1+t(x_2-x_1))\ dt\\
&= -2\pi i\ \overline{\lambda_0}\int_0^1 h'(x_1+t(x_2-x_1))(x_2-x_1)\ dt\\
&= -2\pi i\ \overline{\lambda_0}\int\limits_T h'(w)\ dw.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\iint\limits_{H(r)\ \setminus\ T} |h'(w)|^2\ d\Omega\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_A \overline{h}\ h'dw+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_B \overline{h}\ h'dw-\overline{\lambda}_0\int\limits_T h'\ dw. \qquad (3.1.16)
\end{aligned}
$$

Podemos suprimir o arco T na integral do membro esquerdo de (3.1.16), pois $h'(w)$ é uma função contínua em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Fazendo $w = f(z)$ e $w = g(\xi)$ respectivamente, na primeira e segunda integrais do membro direito de (3.1.16), obtemos de (3.1.11) e (3.1.13) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\iint\limits_{H(r)} |h'(w)|^2 \, d\Omega &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \overline{\varphi}\ \varphi' dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r^{-1}} \overline{\psi}\ \psi'\ d\xi \\
&\quad -\overline{\lambda_0}[h(g(r^{-1})) - h(f(r))] \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \overline{\varphi}\ \varphi' dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r^{-1}} \overline{\psi}\ \psi'\ d\xi \\
&\quad -\overline{\lambda_0}[\psi(r^{-1}) - \varphi(r)].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\iint\limits_{H(r)} |h'(w)|^2 \, d\Omega &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \overline{\varphi}\ \varphi' dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r^{-1}} \overline{\psi}\ \psi'\ d\xi \\
&\quad -\overline{\lambda_0}\psi(r) - \overline{\lambda_0}\ \psi(r^{-1}).
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Desde que

$$\varphi'(z) = -\overline{\lambda_0}\ z^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{-k}\ z^{-k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k\ \alpha_k\ z^{k-1}$$

por (3.1.11), e fazendo $z = re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$, deduzimos que

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} \overline{\varphi}\ \varphi' dz$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -\frac{1}{2\pi i}\left[\overline{-\lambda_0 \log(re^{it}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_{-k}}{k} r^{-k} e^{-ikt} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k e^{ikt}}\right] \\
& \left[-\lambda_0\ r^{-1}\ e^{-it} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{-k} r^{-k-1} e^{it(-k-1)} + \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k r^{k-1}\right. \\
& \left. e^{it(k-1)}\right] rie^{it} dt \;=\; -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[i\overline{\lambda}_0 t - \overline{\lambda}_0\ \log r + \sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{\lambda}_k}{k}\right. \\
& \left. r^k e^{ikt} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\alpha}_k r^k e^{-ikt}\right] \left[-\lambda_0 - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{-k} r^{-k} e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k\right. \\
& \left. r^k e^{ikt}\right] dt \;=\; -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[i\overline{\lambda}_0 t - \overline{\lambda}_0 \log r + \sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{\lambda}_{-k}}{k} r^{-k}\right. \\
& \left. e^{ikt} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\alpha}_k r^k e^{-ikt}\right] (-1) \left[\lambda_0 + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{-k} r^{-k} e^{-ikt} - \sum_{k=1}^{\infty}\right. \\
& \left. k\alpha_k\ r^k\ e^{ikt}\right] dt \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[i\overline{\lambda}_0 t - \overline{\lambda}_0 \log r + \sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{\lambda}_{-k}}{k} r^{-k} e^{ikt}\right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\alpha}_k r^k e^{-ikt}\right] \left[\sum_{k=0}^{m} \lambda_{-k}\ r^{-k} e^{-ikt} - \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k r^k e^{ikt}\right].
\end{aligned}
$$

Como

$$
\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{ikt} dt = \begin{cases} k^{-1}, & \text{se} \quad k \neq 0 \\ i\pi, & \text{se} \quad k = 0 \end{cases}
$$

e (3.1.18)

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{ikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad k \neq 0 \\ 1, & \text{se} \quad k = 0 \end{cases}
$$

temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[i\overline{\lambda}_0 t\sum_{k=0}^{m}\lambda_{-k}\ r^{-k}\ e^{-ikt}\right]dt$$

$$= \overline{\lambda}_0\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}te^{-ikt}dt\right]\lambda_{-k}r^{-k} \ = \ \pi i|\lambda_o|^2-\overline{\lambda}_0\sum_{k=1}^{m}\lambda_{-k}$$

$$k^{-1}r^{-k}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[i\overline{\lambda}_0 t\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k\ r^k e^{ikt}\right]dt \ = \ -\overline{\lambda}_0\sum_{k=1}^{\infty}$$

$$\left[\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}te^{ikt}\ dt\right]\ k\alpha_k\ r^k \ = \ -\overline{\lambda}_0\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\ r^k-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}$$

$$\left[i\overline{\lambda}_0 t\sum_{k=0}^{m}\lambda_{-k}\ r^{-k}\ e^{-ikt}\right]dt \ = \ \overline{\lambda}_0\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}te^{-ikt}dt\right]$$

$$\lambda_{-k}r^{-k} \ = \ \pi i|\lambda_o|^2-\overline{\lambda}_0\sum_{k=1}^{m}\lambda_{-k}k^{-1}r^{-k}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}$$

$$\left[i\overline{\lambda}_0 t\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k r^k\ e^{ikt}\right]dt \ = \ -\overline{\lambda}_0\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}te^{ikt}dt\right]k\alpha_k r^k$$

$$= \ -\overline{\lambda}_0\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k r^k-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\lambda}_0\log r\sum_{k=0}^{m}\lambda_{-k}r^{-k}e^{-ikt}dt$$

$$= \ -\overline{\lambda}_0\log r\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ikt}dt\right]\ \lambda_{-k}r^{-k} \ = \ -|\lambda_0|^2\log r\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}$$

$$\overline{\lambda}_0\log r\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k r^k e^{ikt}dt \ = \ \overline{\lambda}_0\log r\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ikt}dt\right]k\alpha_k r^k = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\overline{\lambda}_{-k}k^{-1}r^{-k}e^{ikt}\sum_{k=0}^{m}\lambda_{-k}r^{-k}e^{-ikt}dt \;=\; \sum_{k=1}^{m}|\lambda_{-k}|^2$$

$$k^{-1}r^{-2k}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\overline{\lambda}_{-k}k^{-1}r^{-k}e^{ikt}\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k r^k e^{ikt}dt=0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\alpha}_0\ r^k\ e^{-ikt}\sum_{k=0}^{m}\lambda_{-k}\ r^{-k}\ e^{-ikt}\ dt=\overline{\alpha}_0\ \lambda_0$$

e

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\alpha}_0\ r^k\ e^{-ikt}\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k\ r^k e^{ikt}\ dt=-\sum_{k=1}^{\infty}k\ |\alpha_k|^2\ r^{2k}.$$

Por conseguinte,

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}\overline{\varphi}\ \varphi'\ dz$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \pi i|\lambda_0|^2-\overline{\lambda}_0\sum_{k=1}^{m}\lambda_{-k}\ k^{-1}\ r^{-k}-\overline{\lambda}_0\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\ r^k-|\lambda_0|^2\ \log r\\
& +\sum_{k=1}^{m}|\lambda_{-k}|^2k^{-1}r^{-2k}+\overline{\alpha}_0\lambda_0-\sum_{k=1}^{\infty}k|\alpha_k|^2r^{2k} \;=\; |\lambda_0|^2\pi i\\
& -\overline{\lambda}_0\sum_{k=1}^{m}\lambda_{-k}k^{-1}r^{-k}-\overline{\lambda}_0\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\ r^k+\overline{\lambda}_0\alpha_0-2|\lambda_0|^2\log r\\
& +|\lambda_0|^2\ \log r+\sum_{k=1}^{m}|\lambda_{-k}|^2k^{-1}r^{-2k}+\overline{\alpha}_0\lambda_0-\sum_{k=1}^{\infty}k|\alpha_k|^2r^{2k}\\
= \quad & -\overline{\lambda}_0\left[-\overline{\lambda}_0\log r+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{-k}k^{-1}r^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k r^k\right]+\alpha_0\overline{\lambda}_0+\overline{\alpha}_0\lambda_0\\
& +|\lambda_0|^2(i\pi-2\ \log r)+\sum_{k=1}^{m}|\lambda_{-k}|^2k^{-1}r^{-2k}-\sum_{k=1}^{\infty}k|\alpha_k|^2r^{2k}
\end{aligned}$$

$$= \quad -\overline{\lambda}_0 \ \varphi(r) + \alpha_0 \ \overline{\lambda}_0 \ + \overline{\alpha}_0 \ \lambda_0 + |\lambda_0|^2 \ (i\pi - 2 \ \log r) + \sum_{k=1}^{m}$$

$$|\lambda_{-k}|^2 \ k^{-1} \ r^{-2k} - \sum_{k=1}^{\infty} k \ |\alpha_k|^2 \ r^{2k}.$$

Similarmente, obtemos de (3.1.13) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi|=r^{-1}} \overline{\psi} \ \psi' \ d\xi \quad &= \quad \overline{\lambda}_0 \ \psi(r^{-1}) - \beta_0 \ \overline{\lambda}_0 - \overline{\beta}_0 \ \lambda_0 + |\overline{\lambda}_0|^2 \\
&\quad (-i\pi - 2 \ \log r) + \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \ k^{-1} \\
&\quad r^{-2k} - \sum_{k=1}^{\infty} k \ |\beta_k|^2 \ r^{2k}.
\end{aligned}$$

Por (3.1.17), deduzimos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int\!\!\int\limits_{H(r)} |h'(w)|^2 \ d\Omega \quad &= \quad \sum_{k=1}^{m} k^{-1} \ (|\lambda_{-k}|^2 + |\lambda_k|^2) r^{-2k} - \sum_{k=1}^{\infty} k \\
&\quad (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) \ r^{2k} - 4|\lambda_0|^2 \log r + \overline{\lambda}_0 \\
&\quad (\alpha_0 - \beta_0) + \lambda_0 \ (\overline{\alpha}_0 - \overline{\beta}_0) \ = \ \sum_{k=1}^{m} k^{-1} \\
&\quad (|\lambda_{-k}|^2 + |\lambda_k|^2) r^{-2k} - \sum_{k=1}^{\infty} k(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) \\
&\quad r^{2k} + 2Re \ [\overline{\lambda}_0(\alpha_0 - \beta_0)] - 4|\lambda_0|^2 \log r.
\end{aligned}$$

Desde que $h'(w)$ é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e F é a interseção de uma família monótona $H(r)$ $(0 < r < 1)$, obtemos pelo Teorema da

Convergência Dominada de Lebesgue, quando $r \to 1^{-1}$, que

$$\frac{1}{\pi} \int\int_F |h'(w)|^2 \; d\Omega = \sum_{k=1}^{m} k^{-1} \; (|\lambda_{-k}|^2 + |\lambda_k|^2)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k \; (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) + 2 \; Re \; [\overline{\lambda}_0(\alpha_0 - \beta_0)]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k^{-1} \; (|\lambda_k|^2 + |\lambda_{-k}|^2) - \sum_{k=1}^{\infty} k \; \left| \sum_{\ell=-m}^{m} b_{-k,\ell} \; \lambda_\ell \right|^2$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k \; \left| \sum_{\ell=-m}^{m} b_{k\ell} \; \lambda_\ell \right|^2$$

$$+2 \; Re \; \left[\overline{\lambda}_0 \; \left(\sum_{\ell=0}^{m} b_{0\ell} \; \lambda_\ell + \sum_{\ell=1}^{m} b_{0,-\ell} \; \lambda_{-\ell} \right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k^{-1} \; (|\lambda_k|^2 + |\lambda_{-k}|^2) - \sum_{k=1}^{\infty} k \; \left| \sum_{\ell=-m}^{m} b_{-k,\ell} \; \lambda_\ell \right|^2$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k \; \left| \sum_{\ell=-m}^{m} b_{k\ell} \; \lambda_\ell \right|^2 + 2 \; Re \; \left[\overline{\lambda}_0 \sum_{\ell=-m}^{m} b_{0\ell} \; \lambda_\ell \right] \geq 0 \tag{3.1.19}$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, a área de F for igual a zero.

□

Temos duas consequências imediatas do Teorema acima. Para a primeira, se escolhemos $\lambda_j = 0$ para $j \neq \ell \neq 0$, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \; |b_{k\ell}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k \; |b_{-k,\ell}|^2 \leq \frac{1}{|\ell|}, \; \ell = \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{3.1.20}$$

E se escolhemos $\lambda_j = 0$ para $j \neq 0$, vemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\ |b_{k0}|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k\ |b_{-k,0}|^2 \leq 2\ Re\ b_{00} = 2\ \log \frac{1}{|a_1|}. \qquad (3.1.21)$$

Corolário 3.1.3. *Se* $\lambda_k \in \mathbb{C}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *e* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$*, então*

$$Re \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} b_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\ (|\lambda_k|^2 + |\lambda_{-k}|^2 \geq 0, \qquad (3.1.22)$$

desde que a segunda série convirja.

Demonstração. É suficiente provar (3.1.22) para o caso em que $\lambda_k = 0$ para todo k grande.

A prova dupla pode ser escrita como

$$q(\lambda_0) \equiv \lambda_0^2\ Re\ b_{00} + 2\ \lambda_0\ Re\ \left[\sum_{\ell \neq 0} b_{0\ell}\ \lambda_\ell\right] + Re\ \left[\sum_{k\neq 0} \sum_{\ell \neq 0} b_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell\right].$$

Segue-se de (3.1.21) que, ou $Re\ b_{00} > 0$, ou que $Re\ b_{00} = 0$ (isto é, $b_{k0} = b_{-k,0} = 0 \Longrightarrow q(\lambda_0)$ independente de λ_0). Portanto, $q(\lambda_0)$ tem um mínimo em $-\infty < \lambda_0 < +\infty$, e por derivação, mostra-se que este mínimo é atingido, se escolhemos λ_0 tal que

$$Re \sum_{\ell} b_{0\ell}\ \lambda_\ell = 0.$$

Para esta escolha de λ_0, obtemos da Desigualdade de Schwarz e de (3.1.9) que

$$\begin{aligned} -q(\lambda_0) &\leq -Re \sum_{k\neq 0} \sum_{\ell} b_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell \leq \left| \sum_{k \neq 0} \sum_{\ell} \frac{|k|^{1/2}}{|k|^{1/2}}\ b_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell \right| \\ &\leq \left[\sum_{k\neq 0} \frac{|\lambda_k|^2}{|k|} \sum_{k\neq 0} |k| \left| \sum_{\ell} b_{k\ell}\ \lambda_\ell \right|^2 \right]^{1/2} \leq \sum_{k \neq 0} \frac{|\lambda_k|^2}{|k|}. \end{aligned}$$

O que prova o Corolário acima. $\square$

Desde que $b_{k1} = b_k$ por (1.1.22) e $b_{-k,1} = a_k$ por (3.1.8) para $k = 1, 2, \cdots$, segue-se de (3.1.20) com $\ell = 1$, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\ |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n\ |b_n|^2 \leq 1. \tag{3.1.23}$$

Corolário 3.1.4. *Se as funções* $f(z) = a_1\ z + a_2\ z^2 + \dots$ $(z \in D)$ *e* $g(\xi) = \xi + b_0 + b_1\ \xi^{-1} + \dots$ $(\xi \in \Delta)$ *são univalentes e disjuntas, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \exp\ (-|b_0|^2). \tag{3.1.24}$$

Demonstração. Por (3.1.7), vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + 1}{a_1}\ z^n = \frac{f(z)}{a_1 z} = \exp\ \left[-\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{0,-\ell}\ z^{\ell} \right],$$

e usando o Lema 1.1.3, segue-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}|^2 \leq |a_1|^2 \exp\ \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\ |b_{0,-\ell}|^2 \right].$$

Mas, por (3.1.21) deduzimos que

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\ |b_{0\ell}|^2 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\ |b_{0,-\ell}|^2 \leq \log\ \frac{1}{|a_1|^2},$$

donde

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\ |b_{0,-\ell}|^2 \leq \log\ \frac{1}{|a_1|^2} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\ |b_{0\ell}|^2 \leq \log\ \frac{1}{|a_1|^2} - |b_{01}|^2.$$

Como $b_{01} = -b_0$ por (3.1.6), temos que

$$\exp\ \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell |b_{0,-\ell}|^2 \right] \leq \frac{1}{|a_1|^2}\ \exp\ (-|b_0|^2).$$

Logo, obtemos (3.1.24). $\square$

3.2 Funções limitadas e funções Bieberbach-Eilenberg

Definição 3.2.1. Dizemos que uma função $f(z) = a_1\ z + a_2\ z^2 + \dots$ é limitada em D, se

$$|f(z)| < 1, \quad |z| < 1. \tag{3.2.1}$$

Seja $f(z) = a_1\ z + a_2\ z^2 + \dots$ uma função limitada e univalente. Escrevendo $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$, definimos os coeficientes tipo de Grunsky $a_{k\ell}$ $(k \geq 0, \ell \geq 0)$ e $a^*_{k\ell}$ $(k \geq 1, \ell \geq 1)$ por

$$\log\ \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell}\ z^k\ \xi^\ell \quad (|z| < 1, |\xi| < 1), \tag{3.2.2}$$

$$\log\ [1 - f(z)\overline{f}(\xi)] = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a^*_{k\ell}\ z^k\ \xi^\ell \quad (|z| < 1, |\xi| < 1). \tag{3.2.3}$$

Observemos que, $a_{k\ell} = a_{\ell k}$ e $a^*_{k\ell} = \overline{a^*}_{k\ell}$.

As funções

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 f(z) &= |a_1|^2\ z + \overline{a}_1\ a_2\ z^2 + \dots \quad (|z| < 1), \\ \overline{a}_1/\overline{f}(\xi^{-1}) &= \xi + \dots \quad (|\xi| > 1) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

são univalentes e disjuntas. Comparando (3.1.2)-(3.1.4) com (3.2.2) e (3.2.3), vemos que

$$\begin{aligned} b_{k\ell} &= -\overline{a}_{k\ell},\ b_{-k,\ell} = a^*_{k\ell},\ b_{-k,-\ell} = -a_{k\ell}, \\ b_{k0} &= \overline{a}_{k0},\ b_{-k,0} = -a^*_{k0},\ b_{00} = -2\ \log|a_1|. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Obteremos agora um resultado de Nehari [12] e Schiffer-Tammi [17].

Teorema 3.2.2. *Seja $f(z) = a_1\ z + a_2\ z^2 + \dots$ uma função univalente em D com $|f(z)| < 1$. Se $\lambda_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \dots)$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, então*

$$Re\ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a^*_{k\ell}\ \lambda_k\ \overline{\lambda}_\ell\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\ |\lambda_k|^2 \tag{3.2.6}$$

desde que a série do membro direito convirja.

Demonstração. Temos pelo Corolário 3.1.3 aplicado as funções $\overline{a}_1\ f(z)$ e $\overline{a}_1/\overline{f}(\xi^{-1})$ definidas em (3.2.4) que

$$Re\ \left[\sum_{k=-\infty}^{-1}\ \sum_{\ell=-\infty}^{-1} b_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell + \sum_{k=-\infty}^{-1} b_{k0}\ \lambda_k\ \lambda_0\ + \sum_{k=-\infty}^{-1}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell\right.$$

$$+\sum_{\ell=-\infty}^{-1} b_{0\ell}\ \lambda_0\ \lambda_\ell + b_{00}\ \lambda_0^2 + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{0\ell}\ \lambda_0\ \lambda_\ell + \sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=-\infty}^{-1} b_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty} b_{k0}\ \lambda_k\ \lambda_0\ + \sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell\right] + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\ (|\lambda_k|^2 + |\lambda_{-k}|^2)$$

$$= Re\ \left[\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{-k,-\ell}\lambda_{-k}\lambda_{-\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k,0}\lambda_{-k}\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{-k,\ell}\lambda_{-k}\lambda_\ell\right.$$

$$+\sum_{\ell=1}^{\infty} b_{0,-\ell}\lambda_0\lambda_{-\ell} + b_{00}\lambda_0^2 + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{0\ell}\lambda_0\lambda_\ell + \sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k,-\ell}\lambda_k\lambda_{-\ell}$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty} b_{k0}\lambda_k\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{k\ell}\lambda_k\lambda_\ell\right] + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}(|\lambda_k|^2 + |\lambda_{-k}|^2) \geq 0.$$

Substituindo $\lambda_k,\ \lambda_0$ e λ_{-k}, respectivamente, por $\overline{\lambda}_k,\ -\lambda_0$ e $-\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, e usando (3.2.5) juntamente com o fato de $a^*_{k\ell} = \overline{a}^*_{\ell k}$, deduzimos que

$$Re\ \left[-\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}\lambda_k\lambda_\ell - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}\lambda_k\lambda_0 - \sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} a^*_{k\ell}\lambda_k\overline{\lambda}_\ell\right.$$

$$-\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{0\ell}\lambda_0\lambda_\ell - 2\lambda_0^2\log|a_1| - \sum_{\ell=1}^{\infty} \overline{a}_{0\ell}\lambda_0\overline{\lambda}_\ell - \sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} a^*_{\ell k}\overline{\lambda}_k\lambda_\ell$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_{k0}\overline{\lambda}_k\lambda_0 - \sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{\ell=1}^{\infty} \overline{a}_{k\ell}\overline{\lambda}_k\overline{\lambda}_\ell\right] + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}|\lambda_k|^2 \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\ |\lambda_k|^2 \quad &\geq \quad Re\ \left[2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}\ \lambda_k\ \lambda_0\right. \\
&\quad +2\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{0\ell}\ \lambda_0\ \lambda_\ell + 2\ \lambda_0^2\ \log|a_1| \\
&\quad \left. +2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} \overline{a_{k\ell}^*\lambda_k\ \overline{\lambda}_\ell}\right] \\
&= \quad 2\ Re\ \left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell}\ \lambda_k\ \lambda_\ell + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}^*\ \lambda_k\ \overline{\lambda}_\ell\right]
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2.3. *Seja $f(z) = a_1\ z + a_2\ z^2 + \ldots$ uma função univalente em D tal que $|f(z)| < 1$. Então,*

$$|a_2| \leq 2\ |a_1|\ (1 - a_1|) \leq \frac{1}{2}. \tag{3.2.7}$$

Se além disso, $e^{-1} \leq |a_1| < 1$ então

$$|a_3| \leq |a_1|\ (1 - |a_1|^2). \tag{3.2.8}$$

Demonstração. Por (3.2.2) e (3.2.3), temos que

$$a_{11}^* = |a_1|^2,\ a_{00} = \log a_1,\ a_{01} = \frac{a_2}{a_1},\ a_{11} = \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}. \tag{3.2.9}$$

Logo, pondo $\lambda_0 = \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = e^{i\theta}$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = 0$ no Teorema 3.2.3, obtemos que

$$Re\ [a_{00}\ \lambda_0^2 + a_{01}\ \lambda_0\ \lambda_1 + a_{10}\ \lambda_1\ \lambda_0 + \lambda_{11}\ \lambda_1^2 + a_{11}^*\ \lambda_1\ \overline{\lambda}_1]$$

$$= Re\ \left[\lambda_2\ \log a_1 + 2\ \lambda e^{i\theta}\ \frac{a_2}{a_1} + \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) e^{2i\theta} + |a_1|^2\right] \leq |\lambda_1|^2 = 1.$$

Donde,

$$\lambda^2 \ \log|a_1| + 2\ \lambda\ Re\ \left[\frac{a_2}{a_1}\ e^{i\theta}\right] + Re\ \left[\left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right)\ e^{2i\theta}\right] + |a_1|^2 \leq 1.$$

Se escolhemos $\theta = -\dfrac{1}{2}\ \arg\left(\dfrac{a_3}{a_1}\right)$ e escrevemos $\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)\ e^{i\theta} = \alpha + i\beta$, deduzimos que

$$2\ \lambda\ Re\ (\alpha + i\beta) + Re\ \left[\frac{a_3}{a_1}\ e^{2i\theta} - \left(\frac{a_2}{a_1}\ e^{i\theta}\right)^2\right] \leq 1 - \lambda^2\ \log|a_1| - |a_1|^2,$$

donde

$$2\ \lambda\ \alpha + Re\ \left[\frac{a_3}{a_1}\ e^{2i\theta}\right] - Re\ [(\alpha + i\beta)^2] \leq 1 + \lambda^2\ \log\ \frac{1}{|a_1|} - |a_1|^2,$$

ou seja,

$$Re\ \left[\frac{a_3}{a_1}\ e^{2i\theta}\right] \leq 1 - |a_1|^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\lambda + \lambda^2\ \log\ \frac{1}{|a_1|}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Re\ \left[\frac{a_3}{a_1}\ e^{2i\theta}\right] &= Re\ \left[\left|\frac{a_3}{a_1}\right|\ e^{i\arg\left(\frac{a_3}{a_1}\right)}\ e^{2i\theta}\right] \\ &= Re\ \left[\left|\frac{a_3}{a_1}\right|\ e^{2i\theta}\ e^{2i\theta}\right] = \left|\frac{a_3}{a_1}\right| \\ &\leq 1 - |a_1|^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\lambda + \lambda^2\ \log\ \frac{1}{|a_1|}. \end{aligned}$$

Uma ótima escolha para λ é o valor $\dfrac{\alpha}{\log|a_1|^{-1}}$, pois $\lambda = \dfrac{\alpha}{\log|a_1|^{-1}}$ torna mínimo o valor da expressão à direita da desigualdade anterior, e isto implica que

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq |a_1|\ \left[1 - |a_1|^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\ \frac{\alpha}{\log|a_1|^{-1}} + \frac{\alpha^2}{(\log|a_1|^{-1})^2}\ \log|a_1|^{-1}\right] \\ &= |a_1|\ (1 - |a_1|^2) - |a_1|\ \beta^2 + |a_1|\ \left[\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\log|a_1|^{-1}} + \frac{\alpha^2}{\log|a_1|^{-1}}\right] \\ &= |a_1|\ (1 - |a_1|^2) - |a_1|\ \beta^2 + \alpha^2\left[1 - \frac{1}{\log|a_1|^{-1}}\right]|a_1|. \end{aligned}$$

Logo,

$$|a_3| \leq |a_1| \ (1 - |a_1|^2) + \alpha^2 \ \left[1 - \frac{1}{\log |a_1|^{-1}}\right] |a_1|. \tag{3.2.10}$$

Se $e^{-1} \leq |a_1| < 1$ o último termo de (3.2.10) é não positivo, e segue-se (3.2.8).

Obtemos (3.2.7), aplicando (3.2.10) com $\alpha = 0$ a função ímpar

$$\sqrt{f(z^2)} = \sqrt{a_1} \ z + \frac{a_2}{2\sqrt{a_1}} \ z^3 + \dots$$

([15], Lema 1.2), que também satisfaz (3.2.1). De fato,

$$\left|\frac{a_2}{2\sqrt{a_1}}\right| \leq |\sqrt{a_1}| \ (1 - |a_1|),$$

donde

$$|a_2| \leq 2 \ |a_1| \ (1 - |a_1|) \leq \frac{1}{2}.$$

□

Exemplo 2. Para $0 < p \leq 1$, seja $f(z) = az + \dots$ $(a > 0)$ a função que aplica D sobre $D \setminus [-1, -p]$. Como função de Koebe $f_0(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ aplica D em $\mathbb{C} \setminus \left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right)$, temos que as funções $h(z) = f_0(f(z)) = \dfrac{f(z)}{[1 - f(z)]^2}$ e $g(z) = \dfrac{4p}{(1+p)^2} \cdot \dfrac{z}{(1-z)^2}$ aplicam D em $\mathbb{C} \setminus \left(-\infty, \dfrac{-p}{(1+p)^2}\right)$. Além disso, $h(0) = g(0) = 0$, $h'(0) > 0$ e $g'(0) > 0$, portanto temos pelo Teorema da Aplicação de Riemann que

$$\frac{f(z)}{[1 - f(z)]^2} = \frac{4p}{(1+p)^2} \cdot \frac{z}{(1-z)^2}. \tag{3.2.11}$$

Segue-se de (3.2.11) que

$$f(z) = az + 2a(1-a) \ z^2 + \dots, \quad a = \frac{4p}{(1+p)^2}.$$

Logo, (3.2.7) é o melhor possível.

As funções Bieberbach-Eilenberg são uma generalização da funções satisfazendo $|f(z)| < 1$.

Definição 3.2.4. Dizemos que uma função

$$f(z) = a_1\ z + a_2\ z^2 + \dots, \quad (|z| < 1)$$

é Bieberbach-Eilenberg, se a função é analítica (não necessariamente univalente) em D e

$$f(z)\ f(\xi) \neq 1 \quad (|z| < 1,\ |\xi| < 1). \tag{3.2.12}$$

É fácil ver que $f(z)$ é uma função Bieberch-Eilenberg se, e somente se, as duas funções

$$a_1\ f(z) = a_1^2\ z + \dots \quad (z \in D) \text{ e } \frac{a_1}{f(\xi^{-1})} = \xi + \dots \quad (\xi \in \Delta) \tag{3.2.13}$$

são disjuntas. Com efeito, suponhamos que $f(z)$ não seja uma função Bieberbach-Eilenberg, ou seja,

$$f(z_1)f(z_2) = 1 \quad (z_1 \in D,\ z_2 \in D).$$

Assim,

$$f(z_1) = \frac{1}{f(z_2)} = \frac{1}{f(\xi^{-1})} \quad (z_2 = \xi^{-1},\ \xi \in \Delta),$$

donde

$$a_1 f(z_1) = \frac{a_1}{f(\xi^{-1})}$$

e isto implica que $a_1 f(z)$ e $\dfrac{a_1}{f(\xi^{-1})}$ não são disjuntas.

Por outro lado, se

$$f(z)\ f(z_1) \neq 1 \quad (|z| < 1,\ |z_1| < 1),$$

temos que

$$f(z) \neq \frac{1}{f(z_1)},$$

donde

$$f(z) \neq \frac{1}{f(\xi^{-1})} \quad (z_1 = \xi^{-1},\ \xi \in \Delta).$$

Assim,

$$a_1 f(z) \neq \frac{a_1}{f(\xi^{-1})} \quad (z \in D,\ \xi \in \Delta),$$

isto é, $a_1 f(z)$ e $\dfrac{a_1}{f(\xi^{-1})}$ são funções disjuntas.

Definimos os números $c_{k\ell}$ $(k, \ell = 0, 1, \ldots)$ por

$$\log \frac{f(z) - f(\xi)}{(z - \xi)[1 - f(z)f(\xi)]} = -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k\ell} \, z^k \, \xi^\ell \qquad (|z| < 1, \ |\xi| < 1). \tag{3.2.14}$$

É claro que $c_{k\ell} = c_{\ell k}$ para $k, \ell = 1, 2, \ldots$. Em particular, se $\xi = 0$ em (3.2.14) deduzimos que

$$\log \frac{f(z)}{a_1 z} = -\sum_{k=1}^{\infty} c_{k0} \, z^k \quad (|z| < 1). \tag{3.2.15}$$

Se $b_{k\ell}$ $(k, \ell = 0, \pm 1, \ldots)$ detona os coeficientes tipo de Grunsky associados ao par disjunto (3.2.13), então segue-se de (3.1.2)-(3.1.4) que

$$\begin{aligned} c_{k\ell} &= b_{k\ell} - b_{-k,\ell} = b_{-k,-\ell} - b_{-k,\ell} \quad (k, \ell = 1, 2, \ldots) \\ c_{k0} &= -b_{k0} = b_{-k,0} \quad (k = 1, 2, \ldots) \\ c_{00} &= \frac{1}{2} \, b_{00} = -\log \, a_1 \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

O próximo teorema foi obtido por Jenkins [7] e Hummel-Schiffer [6].

Teorema 3.2.5. *Seja $f(z)$ uma função Bieberbach-Eilenberg univalentes e sejam λ_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ números complexos não todos nulos. Então,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \sum_{\ell=0}^{m} c_{k\ell} \, \lambda_\ell \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k} + 2 \, Re \left[\overline{\lambda}_0 \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{0\ell} \, \lambda_\ell \right], \tag{3.2.17}$$

e ocorre a igualdade se, e somente se,

$$\text{a área de } (\mathbb{C} \setminus \{f(z) : z \in D\} \setminus \left\{ \frac{1}{f(z)} : z \in D \right\} \text{ for igual a zero.} \tag{3.2.18}$$

Demonstração. Substituindo λ_{-k}, λ_0 e λ_k, respectivamente, por λ_k, λ_0 e $-\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ no Teorema 3.1.2 aplicado as funções $a_1 f(z)$ e

$\dfrac{a_1}{f(\xi^{-1})}$ definidas em (3.2.13) e usando (3.2.16), temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=1}^{m} b_{k,-\ell}\ \lambda_\ell - \sum_{\ell=1}^{m} b_{k\ell}\ \lambda_\ell + b_{k0}\ \lambda_0\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=1}^{m} b_{-k,-\ell}\ \lambda_\ell\right.$$

$$\left. - \sum_{\ell=1}^{m} b_{-k,\ell}\ \lambda_\ell + b_{-k,0}\ \lambda_0\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=1}^{m} (b_{k,-\ell} - \lambda_{k\ell})\lambda_\ell + b_{k0}\ \lambda_0\right|^2$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=1}^{m} (b_{-k,-\ell} - b_{-k,\ell})\ \lambda_\ell + b_{-k,0}\ \lambda_0\right|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=1}^{m} (b_{k,\ell} - b_{k,-\ell})\ \lambda_\ell - b_{k0}\ \lambda_0\right|^2$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=1}^{m} (b_{-k,-\ell} - b_{-k,\ell})\ \lambda_\ell + b_{-k,0}\ \lambda_0\right|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=1}^{m} c_{\ell k}\ \lambda_\ell + c_{k0}\ \lambda_0\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=1}^{m} c_{k\ell}\ \lambda_\ell + c_{k0}\ \lambda_0\right|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=0}^{m} c_{k\ell}\ \lambda_\ell\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=0}^{m} c_{k\ell}\ \lambda_\ell\right|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\sum_{\ell=0}^{m} c_{k\ell}\ \lambda_\ell\right|^2$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k} + 2\ Re\ \left[\overline{\lambda}_0 \left(\sum_{\ell=1}^{m} b_{0,-\ell}\ \lambda_\ell - \sum_{\ell=1}^{m} b_{0\ell}\ \lambda_\ell + b_{00}\ \lambda_0\right)\right]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k} + 2\ Re\ \left[\overline{\lambda}_0 \left(\sum_{\ell=1}^{m} (c_{0\ell} + c_{0\ell})\lambda_\ell + 2c_{00}\ \lambda_0\right)\right]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k} + 4\ Re\ \left[\overline{\lambda}_0 \sum_{\ell=0}^{m} c_{0\ell}\ \lambda_\ell\right].$$

A prova da condição de igualdade, segue imediatamente da igualdade no Teorema 3.1.2. $\square$

Uma consequência imediata do teorema 3.2.5, surge se fizermos $\lambda_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, m$. Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \ |c_{k0}\lambda_0|^2 = |\lambda_0|^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \ |c_{k0}|^2$$

$$\leq 2Re[\overline{\lambda}_0 c_{00}\lambda_0] \ = \ 2|\lambda_0|^2 Rec_{00} \ = \ 2|\lambda_0|^2 Re[-\log a_1] \ = \ -2|\lambda_0|^2 \log |a_1|.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \ |c_{k0}|^2 \leq \log \frac{1}{|a_1|^2}. \tag{3.2.19}$$

A seguir, deduzimos alguns resultados obtidos por Aharonov [1] e Nehari [13].

Teorema 3.2.6. *Seja $f(z) = a_1 \ z + a_2 \ z^2 + \ldots$ uma função Bieberbach-Eilenberg univalente. Então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1, \tag{3.2.20}$$

$$|a_n| < e^{-c/2} \ \frac{1}{\sqrt{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{3.2.21}$$

onde c é a constante de Eüler e

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{\sqrt{1-|z|^2}} \quad (|z| < 1). \tag{3.2.22}$$

Demonstração. Desde que por (3.2.15)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1} \ z^n = \frac{f(z)}{a_1 z} = \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} c_{k0} \ z^k\right], \tag{3.2.23}$$

segue-se do Lema 1.1.3 e de (3.2.19) que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{n+1}|^2}{|a_1|^2} \leq \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} k \ |c_{k0}|^2\right] \leq \exp\left[\log \ \frac{1}{|a_1|^2}\right] = \frac{1}{|a_1|^2}.$$

Assim, obtemos (3.2.20).

Aplicando Lema 1.1.2 com a expressão (3.2.23) e usando (3.2.19), temos que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right|^2 \leq \exp\left[\sum_{k=1}^{n} k\ |c_{k0}|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde

$$\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^2 \leq \exp\left[\sum_{k=1}^{n-1} k\ |c_{k0}|^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right] \leq \exp\left[\log \frac{1}{|a_1|^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right] \quad (n{=}2{,}3{,}\ldots).$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \log(n-1) + c \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

por (1.1.9), segue-se que

$$\left|\frac{a_n}{a_1}\right|^2 < \exp\left[\log\ \frac{1}{|a_1|^2} - \log(n-1) - c\right] = \frac{1}{|a_1|^2}\ \frac{1}{n-1}\ e^{-c} \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Logo, obtemos (3.2.21).

Pela Desigualdade de Schwarz e por (3.2.20), deduzimos (3.2.22). De fato,

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ z^n\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |z|^{2n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|z|^2)^n = \frac{|z|^2}{1-|z|^2} \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. A função

$$f(z) = \frac{z\ \operatorname{sen}\alpha}{1 + i\ z\ \cos\alpha} \quad (0 < \alpha < \pi)$$

é univalente em D e aplica D sobre um disco, que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ e forma um ângulo α com o eixo real, visto que a imagem da circunferência

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2\ \cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{4\ \cos^2\alpha}$$

pela transformação conforme $w = f(z)$ é o eixo real.

Como

$$f(i\ \cos\alpha) = i\ \operatorname{cotg}\alpha = i\ \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \quad (|i\ \cos\alpha| < 1),$$

segue-se que (3.2.22), e consequentemente (3.2.20) são os melhores possíveis.

Se $f(z)$ for uma função Bieberbach-Eilenberg (não necessariamente univalente), Aharonov [1] e Nehari [13] usando o Teorema 3.2.6 e o Princípio de Subordinação, mostraram que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1.$$

Este resultado contém, de fato, a Conjectura de Rogosinski [16], ou seja,

$$|a_n| \leq 1 \text{ para } n = 1, 2, \ldots, \tag{3.2.24}$$

que foi solucionada há vinte e nove anos por Lebedev-Milin.

Exemplo 4. Seja $f(z) = z^n$, $|z| < 1$ e $n = 1, 2, \ldots$. É claro que $f(z)$ é uma função Bieberbach-Eilenberg com $|a_n| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e, portanto, o resultado (3.2.24) é o melhor possível.

Referências Bibliográficas

[1] Aharonov, D., *On Bieberbach-Eilenberg Functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 101–104.

[2] *On the Bieberbach Conjecture for Functions with a Small Second Coefficient*, Israel J. Math., **15** (1973) 137-139.

[3] Hummel, J., *The Coefficient Regions of Starlike Functions*, Pacific J. Math., **7** (1957), 1381–1389.

[4] *A Variational Method for Starlike Functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **9** (1958), 82–87.

[5] *Inequalities of Grunsky Type for Aharonov Pairs*, J. Analyse Math., **25** (1972), 217–257.

[6] Hummel, J. e Schiffer, M., *Coefficient Inequalities for Bieberbach-Eilenberg Functions*, Arch. Rational Mech. Anal., **32** (1969), 87–99.

[7] Jenkins, J., *On Bieberbach-Eilenberg Functions III*, Trans. Amer. Math. Soc., **119** (1965), 195–215.

[8] Leung, Y., *Sucessive Coefficients of Starlike Functions*, Bull. London Math. Soc., **10** (1978), 193–196.

[9] MacGregor, T., *An Inequality Concerning Analytic Functions with a Positive Real Part*, Canad. J. Math., **21** (1969), 1172–1177.

[10] Milin, I., *On the Coefficients of Univalent Functions*, Soviet Math. Doklady, **8** (1967), 1255–1258.

[11] *Univalent Functions and Orthonormal Systems*, Translations of Mathematical Monographs, **49** (1977).

[12] Nehari, Z., *Inequalities for the Coefficients of Univalent Functions*, Arch. Rational Mech. Anal., **34** (1969), 301–330.

[13] *On the Coefficients of Bieberbach-Eilenberg Functions*, J. Analyse Math., **23** (1970), 297–303.

[14] Pommerenke, C., *Problems aus der Funktionentheorie*, Jber. Deustch. Math - Verein, **73** (1971), 1–5.

[15] *Univalent Functions*, Göttingen, (1973).

[16] Rogosinski, W., *On a Theorem of Bieberbach-Eilenberg*, J. London Math. Soc., **14** (1939), 4–11.

[17] Schiffer, M. & Tammi, O., *On the Coefficient Problem for Bounded Univalent Functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **140** (1969), 461–474.

Hilário Alencar

Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, 57072-900, Maceió-AL, Brazil.

Email: hilario@mat.ufal.br