

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Informes de Matemática

Série F-022/88

Hipersuperfícies Mínimas de R^{2m} Invariantes por
 $SO(m) \times SO(m)$

Hilário Alencar da Silva

Rio de Janeiro
Nov./1988

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Hipersuperfícies Mínimas de R^{2m} Invariantes por
 $SO(m) \times SO(m)$

Hilário Alencar da Silva

Tese apresentada para obtenção do Título de Doutor em Ciências

Rio de Janeiro
-1988-

Aos meus pais, Hilário e Raquel.

1. AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer ao Prof. Manfredo P. do Carmo, pela orientação deste trabalho e pelo apoio e estímulo durante a minha permanência no IMPA.

Agradeço também ao Prof. Gudlaugur Thorbergsson, por ter lido criticamente este trabalho, e aos colegas do IMPA, em especial Maurilho Alves e Paulo Carriã pelas conversas matemáticas.

Finalmente agradeço à Lais V. Santos, pelo trabalho de datilografia.

2. INTRODUCTION

Neste trabalho, consideraremos hipersuperfícies mínimas de \mathbb{R}^{2m} , que são invariantes pela ação canônica do grupo $SO(m) \times SO(m)$ no \mathbb{R}^{2m} .

Os métodos da geometria equivariante permitem reduzir o estudo de tais hipersuperfícies, ao estudo de uma curva “geratriz” em um plano xOy (espaço de órbitas) a qual satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem.

As curvas geratriz no espaço de órbitas de tais hipersuperfícies têm os seguintes tipos:

- (a) A curva geratriz passa pela origem do espaço de órbitas (ver figura (a));

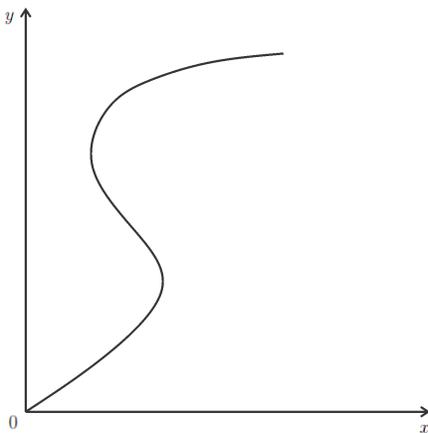


Figura (a)

- (b) A curva geratriz não intercepta o bordo do espaço de órbitas (ver figura (b));

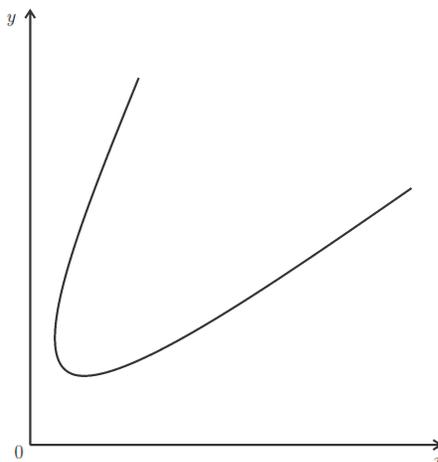


Figura (b)

(c) A curva geratriz intercepta ortogonalmente o bordo do espaço de órbitas (ver figura (c)).

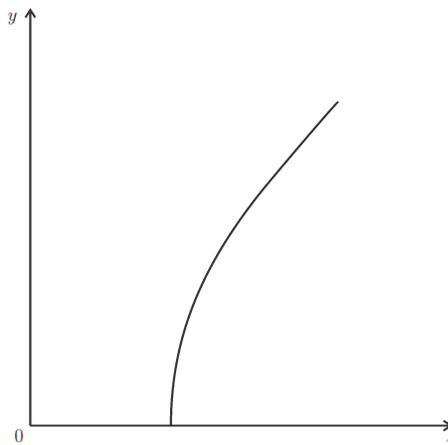


Figura (c)

O tipo (a) corresponde a uma hipersuperfície, que passa pela origem de \mathbb{R}^{2m} e possui uma única singularidade neste ponto. No segundo caso, a hipersuperfície não possui pontos singulares e é do tipo topológico de um cilindro $S^{m-1} \times S^{m-1} \times \mathbb{R}$ sobre $S^{m-1} \times S^{m-1}$. No terceiro caso, também não existem pontos singulares e uma das esferas S^{m-1} se reduz a um ponto, quando a curva geratriz corta o bordo do espaço de órbitas. Neste caso dizemos que a hipersuperfície é do tipo topológico A.

Em [2], Barbosa e do Carmo enunciam sem demonstração o seguinte resultado: *Seja M^{2m-1} , $m = 2$ uma hipersuperfície mínima de \mathbb{R}^{2m} invariante por $SO(m) \times SO(m)$ e que passa pela origem de \mathbb{R}^{2m} . Então M^{2m-1} é o cone quadrático mínimo*

$$C^{2m-1} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m; |X| = |Y|^2\}.$$

Generalizamos este resultado (ver Teorema 3.1) para qualquer $m \geq 2$. Portanto, para descrever todas as hipersuperfícies (regulares) mínimas de \mathbb{R}^{2m} que são invariantes por $SO(m) \times SO(m)$, basta considerar os casos (b) e (c).

O principal resultado deste trabalho é o teorema seguinte, que resolve completamente o problema para os casos $m = 2, 3$.

Teorema 2.1. *Seja M^{2m-1} , $m = 2, 3$, uma hipersuperfície completa e mínima de $\mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$ invariante por $SO(m) \times SO(m)$.*

- (i) *Se M^{2m-1} é do tipo topológico A , então M^{2m-1} é mergulhada;*
- (ii) *Se M^{2m-1} é do tipo topológico de um cilindro $S^{m-1} \times S^{m-1} \times \mathbb{R}$, então M^{2m-1} se auto-intersecta.*

Além disto, a hipersuperfície M^{2m-1} , nos casos (i) e (ii), intersecta o cone quadrático mínimo fora de qualquer compacto, e se aproxima arbitrariamente deste cone.

Apresentamos abaixo os esboços das curvas geratrizes das hipersuperfícies do teorema acima. As figuras (i) e (ii) correspondem aos casos (i) e (ii), respectivamente.

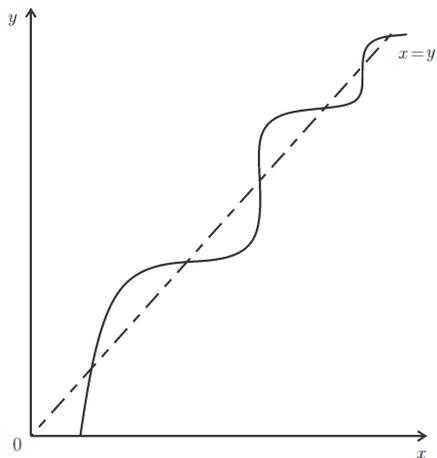


Figura (i)

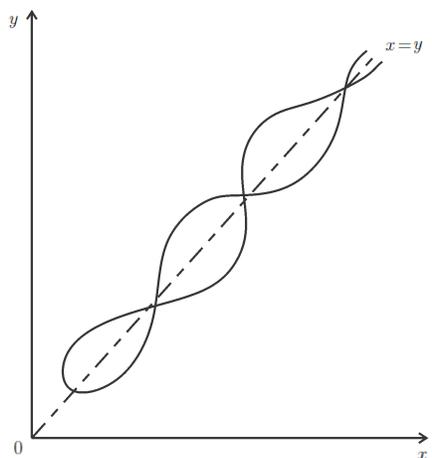


Figura (ii)

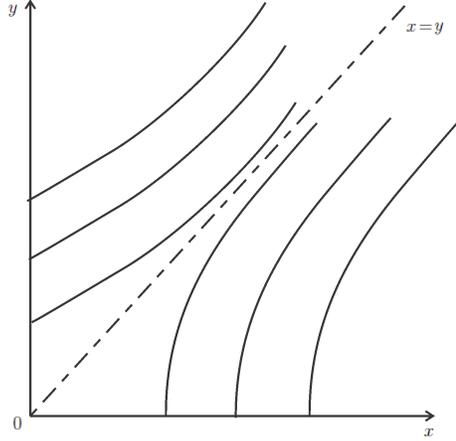
No caso em que a dimensão da hipersuperfície é maior ou igual a 7, obtivemos o seguinte resultado parcial.

Teorema 2.2. *As hipersuperfícies completas e mínimas de $\mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$, $m \geq 4$, invariantes por $SO(m) \times SO(m)$ com tipo topológico A têm as seguintes propriedades:*

- (i) *As hipersuperfícies são mergulhadas;*

- (ii) *As hipersuperfícies folheam \mathbb{R}^{2m} menos o cone quadrático mínimo. Em particular, as hipersuperfícies são estáveis.*

As curvas geratrizes das hipersuperfícies do teorema acima têm o esboço abaixo.



Para o caso em que as hipersuperfícies são do tipo topológico de um cilindro $S^{m-1} \times S^{m-1} \times \mathbb{R}$, o problema continua em aberto.

Antes de enunciarmos o próximo resultado, necessitaremos da seguinte notação:

Sejam M^n uma variedade de dimensão n e $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Para cada ponto $p \in M^n$, seja $(\mathbb{R}^n)_p$ o hiperplano tangente à $X(M^n)$ em $X(p)$.

Indiquemos por

$$W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bigcup_{p \in M} (\mathbb{R}^n)_p$$

o conjunto dos pontos omitidos em \mathbb{R}^{n+1} pelos hiperplanos tangentes à $X(M^n)$.

Hasanis e Koutroufiotis (ver [11]) obtiveram o seguinte resultado: Sejam M^2 uma superfície completa e $X : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica mínima. Se o conjunto W é não-vazio, então $X(M^2)$ é um

plano.

Em colaboração com Katia Frensel (ver [9], Teorema 2.10), estendemos o resultado acima para dimensão arbitrária com uma hipótese adicional sobre o conjunto W . Mais precisamente provamos o seguinte resultado.

Teorema 2.3. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima. Se o conjunto W é um aberto não-vazio, então $X(M^n)$ é um hiperplano.*

As hipersuperfícies do Teorema 5.1 têm a seguinte propriedade (ver Exemplo 6.4): $0 \in W$. Isto mostra que o resultado de Hasanis e Koutroufiotis não pode ser estendido para dimensão arbitrária sem alguma hipótese adicional.

Faremos agora uma descrição sobre cada seção deste trabalho.

Na seção 1 introduzimos algumas definições e resultados sobre a relação entre as hipersuperfícies mínimas de \mathbb{R}^{2m} invariantes por $SO(m) \times SO(m)$ e suas curvas geratrizes. Tais curvas $(x(s), y(s))$ satisfazem à equação diferencial de segunda ordem (ver (1.1))

$$x'(s) y''(s) - x''(s) y'(s) = (m-1) [(x'(s))^2 + (y'(s))^2] \left(\frac{x'(s)}{y(s)} - \frac{y'(s)}{x(s)} \right).$$

Vale observar que as curvas homotéticas à curva geratriz dada também satisfazem à equação acima.

Na seção 2 seguimos as idéias de Bombieri, De Giorgi e Giusti (ver [4]) e introduzimos na equação diferencial acima os parâmetros:

$$\varphi(s) = \operatorname{arctg} \frac{y(s)}{x(s)}, \quad \theta(s) = \operatorname{arctg} \frac{y'(s)}{x'(s)},$$

que são invariantes por homotetias, transformando-a no sistema diferencial (ver 2.13):

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \operatorname{sen} \psi \\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} \psi. \end{cases}$$

Em seguida, caracterizamos as singularidades do sistema acima. Mostramos que quando $m = 2, 3$ os pontos singulares são: sela e foco, e quando $m \geq 4$ os pontos singulares são: sela e nó. Além disto, relacionamos as curvas integrais deste sistema com as soluções da equação diferencial.

Na seção 3 demonstramos a generalização do resultado obtido por Barbosa e do Carmo. A idéia da prova é utilizar o desenvolvimento em série da solução da equação diferencial acima para mostrar, por indução sobre os coeficientes da série, que a única solução que passa pela origem é a bissetriz do espaço de órbitas.

Na seção 4 usando o Teorema das Variedades Estáveis e Instáveis e a existência de uma função de Liapounov, obtemos uma descrição completa das curvas integrais do sistema diferencial acima para $m = 2, 3$. Em seguida, provamos que as curvas integrais deste sistema que nascem nos pontos de sela e terminam nos pontos de foco, estão relacionadas com as curvas no espaço de órbitas do tipo (c). Usando o fato que tais curvas satisfazem à equação diferencial acima, mostramos que estas curvas são as curvas geratrizes das hipersuperfícies do Teorema 4.1 (i). Ainda nesta seção, mostramos a relação entre os pontos de máximo e mínimo da função φ , definida anteriormente, e certos pontos pertencentes às curvas integrais que nascem e terminam em focos. Usando esta relação, provamos que tais curvas integrais correspondem as curvas geratrizes das hipersuperfícies do Teorema 4.1 (ii).

Na seção 5 fazemos uma descrição parcial das curvas integrais do sistema diferencial acima para $m \geq 4$. Em seguida, com as mesmas técnicas usadas na demonstração do Teorema 4.1 (i), provamos que as curvas integrais do sistema que nascem nos pontos de sela e terminam nos pontos de nó, correspondem as curvas geratrizes das hipersuperfícies do Teorema 5.1.

Na seção 6 provamos que, nas condições do Teorema 6.1, a função suporte admite um ponto de mínimo. Como a função suporte de uma hipersuperfície mínima satisfaz uma equação diferencial parcial elíptica, podemos utilizar o Princípio do Máximo para concluir o teorema. Em seguida, mostramos que as hipersuperfícies do Teorema 5.1, fornecem o exemplo desejado.

3. PRELIMINARES

Considere $G = SO(m) \times SO(m)$ agindo de maneira canônica sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. A órbita dessa ação pelo ponto $(X, Y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ é dada por $S^{m-1}(|X|) \times S^{m-1}(|Y|)$, e o espaço de órbitas \mathbb{R}^{2m}/G é representado por

$$\pi(\mathbb{R}^{2m}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\},$$

onde $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $\pi(X, Y) = (|X|, |Y|)$.

Seja M^{2m-1} uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{2m} invariante por G . Então $\pi(M^{2m-1})$ é uma curva η em $\pi(\mathbb{R}^{2m})$, que pode ou não interceptar o bordo de $\pi(\mathbb{R}^{2m})$. Se M^{2m-1} é invariante por G e regular, a interseção de η com o bordo de $\pi(\mathbb{R}^{2m})$ é ortogonal.

Por analogia com as hipersuperfícies rotacionais, chamamos a curva η de *curva geratriz* da hipersuperfície M^{2m-1} .

É um fato conhecido (ver [12], Proposição 1) que a hipersuperfície M^{2m-1} invariante por G é mínima se, e só se, sua curva geratriz $\eta(s) = (x(s), y(s))$ satisfaz a seguinte equação:

$$(3.1) \quad x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) = (m-1)[(x'(s))^2 + (y'(s))^2] \left(\frac{x'(s)}{y(s)} - \frac{y'(s)}{x(s)} \right).$$

Observe que se uma curva $(x(s), y(s))$ é solução de (3.1), então a curva $(y(s), x(s))$, que é a simetria da curva dada em relação à diagonal $x = y$, é também solução de (3.1). Além disto, a curva $\eta(s) = (x(s), y(s))$ com $x(s) = y(s)$ é solução de (3.1). Esta curva geratriz está associada a uma hipersuperfície mínima, que tem singularidade na origem de \mathbb{R}^{2m} , e será denotada por

$$C^{2m-1} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m; |X|^2 = |Y|^2\}.$$

Chamamos C^{2m-1} de *cone quadrático mínimo*.

Para estudarmos o comportamento das curvas geratrizes que interceptam o bordo do espaço de órbitas, necessitaremos da seguinte proposição.

Proposição 3.1 (ver [10], Proposição 6.3). *A cada ponto $(x, 0)$, $x > 0$, de $\pi(\mathbb{R}^{2m})$ corresponde uma única solução da equação (3.1) ortogonal ao semi-eixo $y = 0$, e cujo ponto inicial é $(x, 0)$. Além disto, tal solução é analítica.*

Como estamos interessados em obter propriedades da hipersuperfície M^{2m-1} , que é invariante por G e mínima, nos será também útil a seguinte proposição.

Proposição 3.2 (ver [10], Lema 1.4). *M^{2m-1} é mergulhada se, e só se, a sua curva geratriz é mergulhada.*

Para maiores detalhes sobre a terminologia e resultados aqui usados ver, por exemplo, [1] e [10].

4. RESULTADOS BSICOS

Nesta seção utilizaremos o fato que hipersuperfícies mínimas são “invariantes” por homotetias, para transformar a equação diferencial (3.1) em um campo de vetores no plano. Analisaremos a natureza das singularidades de um tal campo, e indicaremos a correspondência entre as trajetórias deste campo e as soluções de (3.1).

Seja $\lambda : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ uma homotetia, isto é, $X \mapsto \lambda X$, $X \in \mathbb{R}^{2m}$, com $\lambda > 0$.

Observe que uma curva solução de (3.1) é invariante por homotetias. Portanto, como as hipersuperfícies mínimas são “invariantes” por homotetias, seguiremos o método desenvolvido por Bombieri, De Giorgi e Giusti (ver [4], p. 251). Esta técnica consiste em introduzir parâmetros, que são invariantes por homotetias, na equação (3.1), transformando-a num sistema diferencial no plano.

Sem perda de generalidade, podemos supor que as curvas soluções de (3.1) são parametrizadas pelos comprimentos de arco. Logo a equação (3.1) é reescrita como

$$(4.1) \quad x'(s) y''(s) - x''(s) y'(s) = (m-1) \left(\frac{x'(s)}{y(s)} - \frac{y'(s)}{x(s)} \right).$$

Seja $(x(s), y(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $\pi(\mathbb{R}^{2m})$, que satisfaz a equação (4.1). Definimos (ver figura 4.1)

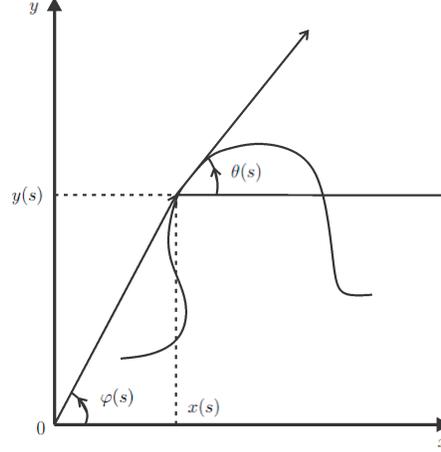


Figura 4.1

$$(4.2) \quad \cos \varphi(s) = \frac{x(s)}{\sqrt{(x(s))^2 + (y(s))^2}} \quad \text{sen } \varphi(s) = \frac{y(s)}{\sqrt{(x(s))^2 + (y(s))^2}}$$

$$(4.3) \quad \cos \theta(s) = x'(s) \quad \text{sen } \theta(s) = y'(s).$$

Assim, temos os parâmetros:

$$(4.4) \quad \varphi(s) = \text{arctg} \frac{y(s)}{x(s)} \quad \theta(s) = \text{arctg} \frac{y'(s)}{x'(s)},$$

os quais são invariantes por homotetias do plano.

Segundo Bombieri, De Giorgi e Giusti, faremos a mudança de parâmetros:

$$\sigma = \theta - 3\varphi + \frac{\pi}{2} \quad \psi = \theta + \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Vamos mostrar que nas coordenadas (σ, ψ) a equação diferencial (4.1) se escreve como

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{3}{2} \text{sen } \sigma - \left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \text{sen } \psi \\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2} \text{sen } \sigma - \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \text{sen } \psi. \end{cases}$$

Usando (4.4) temos por (4.2) e (4.3) que

$$\begin{aligned}\varphi' &= \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} (\sqrt{x^2 + y^2} \cos \varphi \operatorname{sen} \theta - \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \varphi \cos \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{sen}(\theta - \varphi).\end{aligned}$$

Uma vez $(x(s), y(s))$ satisfaz à equação (4.1) temos por (4.4), (4.2) e (4.3) que

$$\begin{aligned}\theta' &= x'y'' - x''y' = -(m-1) \left(\frac{y'}{x} - \frac{x'}{y} \right) \\ (4.5) \quad &= -(m-1) \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{x^2 + y^2} \cos \varphi} - \frac{\cos \theta}{\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \varphi} \right) \\ &= 2 \frac{m-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\cos(\varphi + \theta)}{\operatorname{sen}(2\varphi)}.\end{aligned}$$

Logo, por (4.5) e (4.6), temos a seguinte relação:

$$\frac{\varphi'}{\theta'} = \frac{\operatorname{sen}(2\varphi) \operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{2(m-1) \cos(\varphi + \theta)}$$

ou seja,

$$(4.6) \quad -2(m-1) \cos(\varphi + \theta) \varphi' + \operatorname{sen}(2\varphi) \operatorname{sen}(\theta - \varphi) \theta' = 0.$$

E pondo

$$(4.7) \quad \begin{aligned}\sigma &= \theta - 3\varphi + \frac{\pi}{2} \\ \psi &= \theta + \varphi - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

obtemos que

$$(4.8) \quad \varphi = \frac{\psi - \sigma + \pi}{4} \quad \theta = \frac{3\psi + \sigma + \pi}{4};$$

$$(4.9) \quad \varphi' = \frac{\psi' - \sigma'}{4} \quad \theta' = \frac{3\psi' + \sigma'}{4}.$$

Assim, usando (4.8) e (4.9), temos que

(4.10)

$$\begin{aligned} -2(m-1) \cos(\varphi + \theta) \varphi' &= -2(m-1) \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\psi' - \sigma'}{4} \\ &= 2(m-1) (\text{sen } \psi) \frac{\psi' - \sigma'}{4} \end{aligned}$$

e

(4.11)

$$\begin{aligned} \text{sen}(2\varphi) \text{sen}(\theta - \varphi)\theta' &= \text{sen}\left(\frac{\psi - \sigma}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\sigma}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\sigma}{2}\right) \left(\text{sen} \frac{\psi}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + \text{sen} \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\psi}{2}\right) \\ &\quad \frac{3\psi' + \sigma'}{4} \\ &= \left(\cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + \text{sen} \frac{\psi}{2} \text{sen} \frac{\sigma}{2}\right) \\ &\quad \left(\text{sen} \frac{\psi}{2} \cos \frac{\sigma}{2} + \text{sen} \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\psi}{2}\right) \\ &= \frac{3\psi + \sigma}{4} = \left(\text{sen} \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos^2 \frac{\sigma}{2} + \text{sen} \frac{\sigma}{2} \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\sigma}{2} \cos^2 \frac{\psi}{2} \text{sen} \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\sigma}{2} \text{sen}^2 \frac{\psi}{2} + \text{sen} \frac{\psi}{2} \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{\psi}{2} \text{sen}^2 \frac{\sigma}{2}\right) \frac{3\psi' + \sigma'}{4} \\ &= \frac{1}{2}(\text{sen } \psi + \text{sen } \sigma) \frac{3\psi' + \sigma'}{4}. \end{aligned}$$

Substituindo (4.10) e (4.11) em (4.6) temos que

$$2(m-1) \text{sen } \psi \frac{\psi' - \sigma'}{4} + \frac{1}{2} (\text{sen } \psi + \text{sen } \sigma) \frac{3\psi' + \sigma'}{4} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} [2(m-1) \operatorname{sen} \psi \psi' - 2(m-1) \operatorname{sen} \psi \sigma' + \\
&\quad + \frac{3}{2} (\operatorname{sen} \psi + \operatorname{sen} \sigma) \psi' + \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \psi + \operatorname{sen} \sigma) \sigma'] = \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(-2(m-1) \operatorname{sen} \psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma \right) \sigma' + \right. \\
&\quad \left. + \left(2(m-1) \operatorname{sen} \psi + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \psi + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma \right) \psi' \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(\left(-2(m-1) + \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma \right) \sigma' + \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(2(m-1) + \frac{3}{2} \right) \operatorname{sen} \psi + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma \right) \psi' \right] = 0
\end{aligned}$$

E obtemos o sistema diferencial no plano nas coordenadas (σ, ψ) :

$$(4.12) \quad \begin{cases} \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) + \frac{3}{2} \right) \operatorname{sen} \psi \\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \psi. \end{cases}$$

Caracterizemos os pontos singulares do sistema acima. Para terminologia usada aqui ver [13].

Os pontos singulares de (4.12) são da forma

$$(\sigma, \psi) = (j\pi, k\pi),$$

$j, k \in \mathbb{Z}$. Como a função seno é periódica, basta estudarmos os seguintes pontos singulares: $(0, 0)$, (π, π) , $(-\pi, -\pi)$, $(-\pi, \pi)$, $(\pi, -\pi)$, $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$ e $(0, -\pi)$.

Reescrevemos o campo do sistema (4.12) como

$$X(\sigma, \psi) = \left(-\frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) + \frac{3}{2} \right) \operatorname{sen} \psi, \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \psi \right).$$

Então, indicando por DX a diferencial da aplicação X , obtemos

$$DX(\sigma, \psi) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \cos \sigma & -\left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \cos \psi \\ \frac{1}{2} \cos \sigma & -\left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Como

$$DX(0, 0) = -DX(\pi, \pi) = -DX(-\pi, -\pi) = -DX(-\pi, \pi) = -DX(\pi, -\pi)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \\ \frac{1}{2} & -\left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{e } DX(\pi, 0) = DX(-\pi, 0) = -DX(0, \pi) = -DX(0, -\pi)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} & -\left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

temos que os autovalores da matriz $DX(0, 0)$ são:

$$\lambda_1(0, 0) = \frac{1 - 2m + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2(0, 0) = \frac{1 - 2m - \sqrt{\Delta}}{2};$$

os autovalores das matrizes $DX(\pi, \pi)$, $DX(-\pi, -\pi)$, $DX(-\pi, \pi)$ e $DX(\pi, -\pi)$ são:

$$\lambda_1(\pi, \pi) = \lambda_1(-\pi, -\pi) = \lambda_1(-\pi, \pi) = \lambda_1(\pi, -\pi) = \frac{2m - 1 + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$\lambda_2(\pi, \pi) = \lambda_2(-\pi, -\pi) = \lambda_2(-\pi, \pi) = \lambda_2(\pi, -\pi) = \frac{2m - 1 - \sqrt{\Delta}}{2};$$

os autovalores das matrizes $DX(\pi, 0)$ e $DX(-\pi, 0)$ são:

$$\lambda_1(\pi, 0) = \lambda_1(-\pi, 0) = 2, \quad \lambda_2(\pi, 0) = \lambda_2(-\pi, 0) = 2 - 2m$$

e, finalmente, os autovalores das matrizes $DX(0, \pi)$ e $DX(0, -\pi)$ são:

$$\lambda_1(0, \pi) = \lambda_1(0, -\pi) = 2m - 2, \quad \lambda_2(0, \pi) = \lambda_2(0, -\pi) = -2,$$

onde $\Delta = 4(m-1)^2 - 12(m-1) + 1$.

Se considerarmos m como parâmetro contínuo não-negativo, temos que

$$\begin{aligned}\Delta &> 0, \text{ se } m > \frac{5}{2} + \sqrt{2} \text{ ou } m < \frac{5}{2} - \sqrt{2}; \\ \Delta &< 0, \text{ se } \frac{5}{2} - \sqrt{2} < m < \frac{5}{2} + \sqrt{2}; \\ \Delta &= 0, \text{ se } m = \frac{5}{2} - \sqrt{2} \text{ ou } m = \frac{5}{2} + \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Mas, para nosso objetivo, restringiremos a caracterização dos pontos singulares nos casos em que m é um número inteiro maior ou igual a 2.

Primeiro caracterizaremos os pontos singulares, cujos autovalores nestes pontos dependem de Δ . Assim, temos dois casos a considerar:

1° *caso*: $m = 2, 3$. Neste caso $\Delta < 0$. Portanto $\lambda_1(0, 0)$ e $\lambda_2(0, 0)$ são números complexos conjugados com parte real negativa, ou seja, $(0, 0)$ é um ponto de foco atrator (ver figura 4.2). Além disto, $\lambda_1(\pi, \pi) = \lambda_1(-\pi, -\pi) = \lambda_1(-\pi, \pi) = \lambda_1(\pi, -\pi)$ e $\lambda_2(\pi, \pi) = \lambda_2(-\pi, -\pi) = \lambda_2(-\pi, \pi) = \lambda_2(\pi, -\pi)$ são também números complexos conjugados, só que com parte real positiva, ou seja, $(\pi, \pi), (-\pi, -\pi), (-\pi, \pi)$ e $(\pi, -\pi)$ são pontos de foco instáveis.

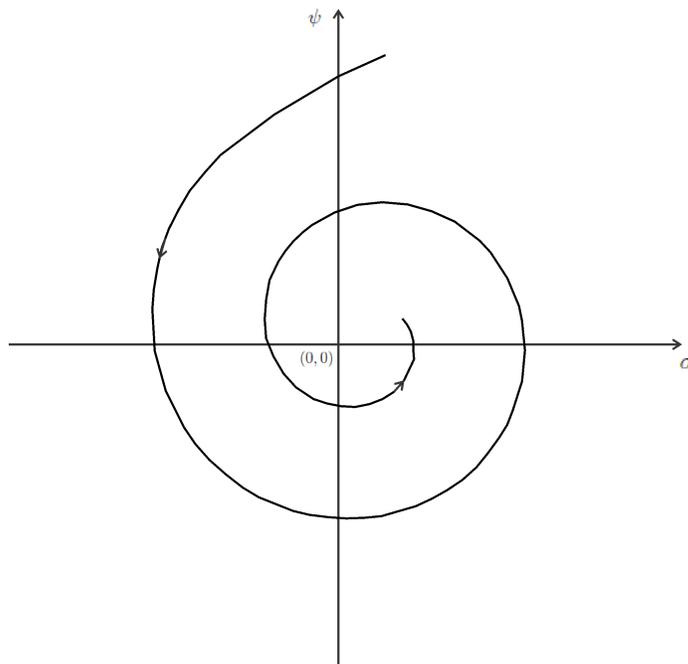


Figura 4.2

2º caso: $m \geq 4$. Neste caso $\Delta > 0$. Logo $\lambda_1(0,0)$ e $\lambda_2(0,0)$ são números reais com $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, isto é, $(0,0)$ é um nó atrator (ver figura 4.3).

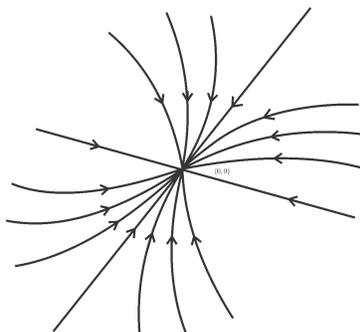


Figura 4.3

Além disto, $\lambda_1(\pi, \pi) = \lambda_1(-\pi, -\pi) = \lambda_1(-\pi, \pi) = \lambda_1(\pi, -\pi)$ e $\lambda_2(\pi, \pi) = \lambda_2(-\pi, -\pi) = \lambda_2(-\pi, \pi) = \lambda_2(\pi, -\pi)$ são também números reais, só que $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, ou seja, (π, π) , $(-\pi, -\pi)$, $(-\pi, \pi)$ e $(\pi, -\pi)$ são pontos de

nó instáveis.

Analisaremos agora os pontos singulares, cujos autovalores nestes pontos não dependem de Δ .

Como $m \geq 2$ temos:

$$\lambda_1(\pi, 0) = \lambda_1(-\pi, 0) = 2 > 0 > \lambda_2(\pi, 0) = \lambda_2(-\pi, 0) = 2 - 2m$$

$$\lambda_1(0, \pi) = \lambda_1(0, -\pi) = 2m - 2 > 0 > \lambda_2(0, \pi) = \lambda_2(0, -\pi) = -2,$$

ou seja, $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$ e $(0, -\pi)$ são pontos de sela (ver figura 4.4).

Sejam $E^s(p)$ e $E^u(p)$ os auto-espacos associados aos auto-valores negativo e positivo, respectivamente, no ponto singular p . Chamaremos $E^s(p)$ de subespaço estável e $E^u(p)$ de subespaço instável.

Pelo Teorema das variedades Estável e Instável (ver [13], p. 296) existem variedades invariantes $W^s(p)$ e $W^u(p)$ tais que os espacos tangentes em p são $E^s(p)$ e $E^u(p)$, respectivamente (ver figura 4.4).

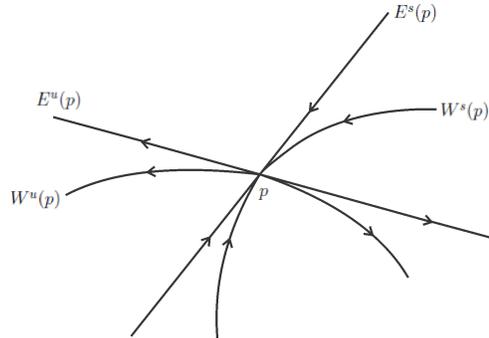


Figura 4.4

Para traduzir o comportamento do (σ, ψ) no comportamento do sistema (x, y) , precisamos do Lema 4.1 e da Proposição 4.1 que se seguem.

Lema 4.1. *Seja $(x(s), y(s))$ uma solução de (4.1) parametrizada pelo comprimento de arco no plano xy . Seja $(\sigma(s), \psi(s))$ uma curva solução de (4.13) contida no plano $\sigma\psi$, onde $\sigma(s)$ e $\psi(s)$ são dadas pelas equações (4.4) e (4.8). Então temos as seguintes propriedades:*

- (i) $\sigma = \pi, \psi = 0 \implies x > 0, y = 0, x' > 0, y' > 0;$
- (ii) $\sigma = \psi \implies x = y; \sigma = -\psi \implies \varphi = \theta;$
- (iii) $\sigma = \psi = 0 \implies x = y > 0, x' = y' > 0;$
 $\sigma = \psi = \pi \implies x = y > 0, x' = y' < 0;$
- (iv) $\sigma = 0, 0 < \psi < \pi \implies y > x;$
- (v) $\sigma = 0, -\pi < \psi < 0 \implies y < x;$
- (vi) $0 < \psi < \sigma < \pi \implies 0 < \varphi < \frac{\pi}{4} \implies y < x.$

Proof. Os itens (i), (ii) e (iii) decorrem imediatamente de (4.7), (4.2) e (4.3).

Para provarmos (iv), façamos $\sigma = 0$ em (4.7) para obtermos

$$(4.13) \quad \varphi = \frac{\psi}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Como, por (4.13), $\operatorname{tg} \varphi = 1 + 2\epsilon$, onde $\epsilon = \frac{\operatorname{tg} \psi/4}{1 - \operatorname{tg} \psi/4} > 0$ pois $0 < \psi < \pi$, temos, usando (4.4), que

$$\frac{y}{x} = 1 + 2\epsilon, \text{ ou seja, } y > x.$$

De maneira análoga, observando que $\epsilon < 0$ se $-\pi < \psi < 0$, prova-se (v).

Finalmente, (vi) segue de (4.7) e (4.4). Com efeito, usando (4.7) juntamente com a hipótese, temos que

$$0 < \sigma - \psi = -4\varphi + \pi < \pi, \text{ ou seja, } 0 < \varphi < \pi/4$$

e por (4.4), $0 < \frac{y}{x} < 1$. □

Proposição 4.1. *Seja $(x(s), y(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no plano xy solução de (4.1). Então*

$$(4.14) \quad \theta'(s) = 0 \iff \psi(s) = j\pi,$$

onde $\theta(s)$ é ângulo no plano xy da tangente a curva $(x(s), y(s))$ com o eixo $0x$ (ver figura 4.1), $j \in \mathbb{Z}$, $x(s) \neq 0$, $y(s) \neq 0$, $x'(s) \neq 0$, $y'(s) \neq 0$ e ψ é definida em (4.7).

Proof. Uma vez que

$$\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)}, \quad (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1,$$

obtemos que

$$(4.15) \quad \theta'(s) = x'(s) y''(s) - x''(s) y'(s).$$

Usando (4.1) reescrevemos (4.15) como

$$(4.16) \quad \theta'(s) = (m-1) \left(\frac{x'(s)}{y(s)} - \frac{y'(s)}{x(s)} \right) = (m-1) \left(\frac{x(s)x'(s) - y(s)y'(s)}{x(s)y(s)} \right)$$

Assim, por (4.16), (4.4) e (4.7), obteremos a sequência de equivalências:

$$\theta'(s) = 0 \iff x(s)x'(s) = y(s)y'(s) \iff \frac{y'(s)}{x'(s)} = \frac{x(s)}{y(s)}$$

$$\iff \operatorname{tg} \theta(s) = \operatorname{cotg} \varphi(s) \iff \theta(s) + \varphi(s) = \frac{\pi}{2} + j\pi$$

$$\iff \psi(s) = j\pi, j \in \mathbb{Z}.$$

□

Necessitaremos nas seções seguintes de alguns resultados obtidos por Hsiang, Teng e Yu (ver [12], Proposição 3).

Proposição 4.2. *Seja $(x(s), y(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no plano xy solução de (4.1). Sejam*

$$I(s) = [x(s)]^{m-1} y'(s), \quad J(s) = [y(s)]^{m-1} x'(s).$$

Então

$$\frac{dI}{ds} = (m-1) \frac{[x(s)]^{m-1} (x'(s))^2}{y(s)}, \quad \frac{dJ}{ds} = (m-1) \frac{[y(s)]^{m-1} (y'(s))^2}{x(s)}.$$

Corolário 4.1. *I e J são funções não decrescentes, se $x > 0$ e $y > 0$.*

5. O CONE QUADRÁTICO MÍNIMO

O objetivo dessa seção é demonstrar o teorema seguinte.

Teorema 5.1. *Seja M^{2m-1} uma hipersuperfície mínima de \mathbb{R}^{2m} invariante por $SO(m) \times SO(m)$ e que passa pela origem de \mathbb{R}^{2m} , $m \geq 2$. Então M^{2m-1} é o cone quadrático mínimo.*

Caso particular em que $m = 2$, foi enunciado sem demonstração por Barbosa e do Carmo (ver [2], p. 406).

Antes de demonstrarmos o teorema acima, necessitaremos do resultado seguinte, que contém o ponto crucial da prova.

Lema 5.1. *Se $x(s)$ e $y(s)$ são funções analíticas reais que satisfazem*

$$(4.1) \text{ com } x(0) = y(0) = 0, \text{ então } x(s) = y(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} s.$$

Proof. Como x e y são funções analíticas reais com $x(0) = y(0) = 0$, podemos expressar

$$(5.1) \quad x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n, \quad y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n.$$

Uma vez que

$$(5.2) \quad x'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1},$$

temos que

$$\begin{aligned} x x' &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1} \right) \\ &= s \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} s^n \right) \\ &= s \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (n+1) a_{k+1} a_{n-k+1} \right) s^n. \end{aligned}$$

Portanto

$$(5.3) \quad x x' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (n+1) a_{k+1} a_{n-k} \right) s^n.$$

Analogamente,

$$(5.4) \quad y'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n s^{n-1}$$

implica que

$$(5.5) \quad y y' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (n+1) b_{k+1} b_{n-k} \right) s^n.$$

Assim, usando (5.3) e (5.5), vemos que

$$(5.6) \quad x x' - y y' = (a_1^2 - b_1^2) s + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) (a_{k+1} a_{n-k} - b_{k+1} b_{n-k}) \right).$$

Pondo

$$(5.7) \quad c_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) (a_{k+1} a_{n-k} - b_{k+1} b_{n-k}),$$

$n \geq 2$, reescrevemos (5.6) como

$$(5.8) \quad x x' - y y' = (a_1^2 - b_1^2) s + \sum_{n=2}^{\infty} c_n s^n.$$

Por (5.4) e uma vez que

$$(5.9) \quad x''(s) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n s^{n-2},$$

temos

$$\begin{aligned} x'' y' &= \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n s^{n-2} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n b_n s^{n-1} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} s^n \right). \end{aligned}$$

Logo

$$(5.10) \quad x'' y' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)(n-k+1) a_{k+2} b_{n-k+1} \right) s^n.$$

Analogamente,

$$(5.11) \quad y''(s) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n s^{n-2}$$

implica que

$$(5.12) \quad x' y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+2)(k+1)(n-k+1) a_{n-k+1} b_{k+2} \right) s^n.$$

Usando (5.10) e (5.12), obtemos que

$$(5.13) \quad x'' y' - x' y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)(n-k+1) \right. \\ \left. (a_{k+2} b_{n-k+1} - a_{n-k+1} b_{k+2}) \right) s^n$$

Pondo

$$(5.14) \quad d_n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)(n-k+1)(a_{k+2} b_{n-k+1} - a_{n-k+1} b_{k+2}),$$

$n \geq 0$, reescrevemos (5.13) como

$$(5.15) \quad x'' y' - x' y'' = \sum_{n=0}^{\infty} d_n s^n.$$

Vamos agora calcular o segundo termo de (4.1). Usando (5.1), vemos que

$$\begin{aligned} xy &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n \right) = \\ &= \left(s \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} s^n \right) \left(s \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} s^n \right) \\ &= s^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j+1} b_{j+1} \right) s^n. \end{aligned}$$

Fazendo

$$(5.16) \quad e_n = \sum_{j=0}^n a_{n-j+1} b_{j+1},$$

$n \geq 0$, reescrevemos (5.16) como

$$(5.17) \quad xy = s^2 \sum_{n=0}^{\infty} e_n s^n.$$

Logo, por (5.17) e (5.15), obtemos

$$(5.18) \quad \begin{aligned} xy(x''y' - xy'') &= s^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} e_n s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n s^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n d_i e_{n-i} \right) s^{n+2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-2} d_i e_{n-i-2} \right) s^n. \end{aligned}$$

Como x e y satisfazem (4.1), obtemos por (5.8) e (5.18) a seguinte equação:

$$(5.19) \quad (m-1)(a_1^2 - b_1^2)s + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(m-1)c_n + \sum_{i=0}^{n-2} d_i e_{n-i-2} \right] s^n = 0,$$

$m \geq 2$.

Faremos agora uso do método de indução sobre os coeficientes, para concluirmos a demonstração. É claro que por (5.19), $a_1 = b_1$. Suponhamos que

$$(5.20) \quad a_\ell = b_\ell,$$

$\ell = 1, 2, \dots, n-1$. Assim,

$$(5.21) \quad a_{k+2} b_{i-k+1} - a_{i-k+1} b_{k+2} = 0$$

para $i = 0, 1, \dots, n-2$ e $k = 0, 1, \dots, n-3$.

Como, por (5.14) e (5.16), temos que

$$(5.22) \quad \sum_{i=0}^{n-2} d_i e_{n-i-2} = \sum_{i=0}^{n-2} \left[\left(\sum_{k=0}^i (k+2)(k+1)(i-k+1) \right) (a_{k+2} b_{i-k+1} - a_{i-k+1} b_{k+2}) \right. \\ \left. \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-i-2} a_{n-i-j-1} b_{j+1} \right) \right],$$

obtemos, usando (5.21) e (5.20), que

$$(5.23) \quad \sum_{i=0}^{n-2} d_i e_{n-i-2} = n(n-1)(a_n b_1 - a_1 b_n) a_1 b_1 \\ = n(n-1) a_1^3 (a_n - b_n).$$

Além disto, usando (5.7) e (5.20), vemos que

$$(5.24) \quad c_n = a_1 a_n - b_1 b_n + n(a_1 a_n - b_1 b_n) \\ = (n+1) a_1 (a_n - b_n).$$

Portanto, fazendo uso de (5.24), (5.23) e (5.19), obtemos que

$$(m-1)(n+1) a_1 (a_n - b_n) + n(n-1) a_1^3 (a_n - b_n) = \\ = a_1 [(m-1)(n+1) + n(n-1) a_1^2] (a_n - b_n) = 0.$$

Segue-se o resultado desejado.

Demonstração do Teorema 5.1 O fato que toda hipersuperfície mínima em \mathbb{R}^{2m} é analítica implica que sua curva geratriz é analítica. Portanto, como a hipersuperfície M^{2m-1} passa pela origem de \mathbb{R}^{2m} , temos que as funções coordenadas de sua curva geratriz estão nas condições

do Lema 5.1. Assim, a curva geratriz é dada por $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} s, \frac{\sqrt{2}}{2} s \right)$ e a

hipersuperfície que corresponde a esta curva é o cone quadrático mínimo. \square

6. HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS DE \mathbb{R}^{2m} INVARIANTES POR
 $SO(m) \times SO(m)$ COM $m = 2, 3$

Nesta seção, vamos determinar todas as hipersuperfícies completas mínimas de \mathbb{R}^{2m} , $m = 2, 3$, que são invariantes pela ação de $SO(m) \times SO(m)$ e não passam pela origem (as que passam pela origem foram determinandas na seção anterior).

Tais hipersuperfícies são de dois tipos topológicos distintos conforme a curva geratriz $(x(s), y(s))$ intercepta ou não o bordo do espaço de órbitas. No segundo caso, a hipersuperfície é do tipo topológico de um cilindro $S^{m-1} \times S^{m-1} \times \mathbb{R}$ sobre $S^{m-1} \times S^{m-1}$. No primeiro caso, quando a curva a geratriz corta o bordo, uma das esferas S^{m-1} se reduz a um ponto. Indicando por \mathbb{R}^+ a semi-reta $(0, \infty)$, podemos pensar no tipo topológico resultante como proveniente de duas cópias de $S^{m-1} \times S^{m-1} \times \mathbb{R}^+$, onde um S^{m-1} tende para um ponto quando $s_0 \in \mathbb{R}^+$ tende para 0, e que são unidas pelo bordo. Um tal tipo topológico será chamado *tipo topológico A*.

Para determinar as hipersuperfícies mencionadas, faremos um estudo das trajetórias correspondentes no sistema (4.13). Mostraremos que o primeiro caso corresponde às trajetórias, que nascem em uma sela e terminam em um ponto de foco. No segundo caso corresponde às trajetórias, que nascem e terminam em pontos de foco. A análise detalhada destas trajetórias é o elemento crucial para demonstrar o teorema seguinte, que é o resultado principal deste trabalho.

Teorema 6.1. *Seja M^{2m-1} , $m = 2, 3$, uma hipersuperfície completa e mínima de $\mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$ invariante por $SO(m) \times SO(m)$.*

- (i) *Se M^{2m-1} é do tipo topológico A, então M^{2m-1} é mergulhada;*
- (ii) *Se M^{2m-1} é do tipo topológico de um cilindro, então M^{2m-1} se auto-intersecta.*

Além disto, a hipersuperfície M^{2m-1} , nos casos (i) e (ii), intersecta o cone quadrático mínimo fora de qualquer compacto, e se aproxima arbitrariamente deste cone.

Para demonstrarmos o teorema acima, caracterizaremos o comportamento das curvas geratrizes das hipersuperfícies dos casos (i) e (ii). Necessitaremos de alguns resultados auxiliares.

Lema 6.1. *Seja $m = 2, 3$. Existe uma curva integral $\gamma(s)$ no plano $\sigma\psi$ do sistema diferencial (4.12) com as seguintes propriedades:*

(a) $\gamma(-\infty) = (\pi, 0)$, $\gamma(+\infty) = (0, 0)$;

(b) *As retas $\sigma = 0$, $\psi = 0$, $\sigma = \psi$ e $\sigma = -\psi$ intersectam uma infinidade de vezes a curva γ .*

Proof. Analisemos o comportamento do campo vetorial em $\sigma\psi$ determinado pelo sistema (4.12) ao longo dos seguintes segmentos:

$$l_1 = \{0 < \sigma < \pi; \psi = 0\}; \quad l_2 = \{0 < \psi < \pi; \sigma = 0\},$$

$$l_3 = \left\{0 < \psi = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}\right\} \quad \text{e} \quad l_4 = \{0 < \psi = \sigma + \pi < \pi\}.$$

Ao longo de l_1 , temos:

$$\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma < 0, \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma > 0.$$

Ao longo de l_2 , temos:

$$\frac{d\sigma}{ds} = -\left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \operatorname{sen} \psi < 0, \quad \frac{d\psi}{ds} = -\left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} \psi < 0.$$

Ao longo de l_3 , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds} &= -\frac{3}{2} \operatorname{sen}(\pi - 2\psi) - \left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \operatorname{sen} \psi \\ &= -\frac{3}{2} \operatorname{sen} 2\psi - \left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \operatorname{sen} \psi \\ &= -3 \operatorname{sen} \psi \cos \psi - \left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \operatorname{sen} \psi \\ &= -\left(3 \cos \psi + \left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right)\right) \operatorname{sen} \psi < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{ds} &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi - 2\psi) - \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} \psi \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi - \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} \psi \\
&= \operatorname{sen} \psi \cos \psi - \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} \psi \\
&= \left(\cos \psi - \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right)\right) \operatorname{sen} \psi < 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, ao longo de l , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{ds} &= -\frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \operatorname{sen}(\sigma + \pi) \\
&= -\frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma + \left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \operatorname{sen} \sigma \\
&= 2(m-1) \operatorname{sen} \sigma < 0, \\
\frac{d\psi}{ds} &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen}(\sigma + \pi) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma + \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} \sigma \\
&= 2(m-1) \operatorname{sen} \sigma < 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\frac{d\psi}{d\sigma} = 1$, isto é, l é uma curva integral do sistema (4.12).

Como $(-\sigma, -\psi)$ é solução do sistema (4.12), se (σ, ψ) também o é; então temos o seguinte esboço (ver figura 6.1) do comportamento do campo vetorial ao longo dos segmentos l_1, l_2, l_3, l e segmentos simétricos em relação a origem l_1^-, l_2^-, l_3^- e l^- :

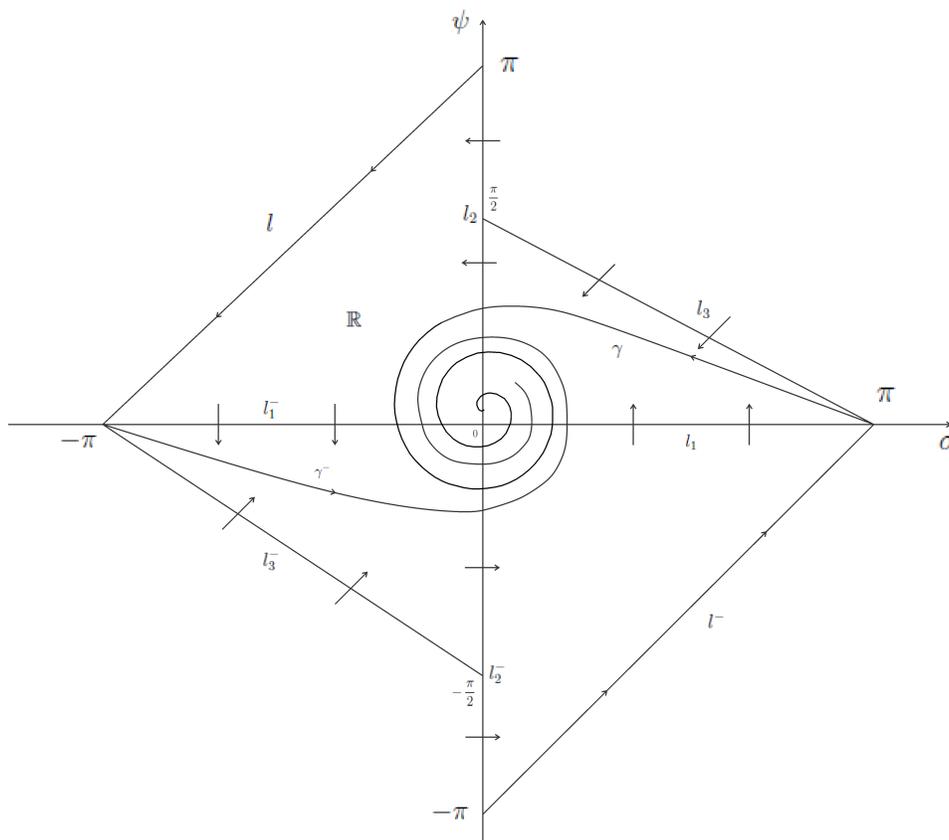


Figura 6.1

Como o coeficiente angular de $E^u(\pi, 0)$ é

$$-\frac{1}{4(m-1)+3},$$

temos, pelo Teorema da Variedade Instável, que existe uma curva integral, que indicaremos por γ , com as seguintes propriedades: γ está contido em $W^u(\pi, 0)$, $\gamma(-\infty) = (\pi, 0)$ e o segmento inicial de γ está entre l_1 e l_3 . Além disto, a curva γ permanece na região R limitada por l_3 , $\left\{\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi; \sigma = 0\right\}$, l , l_3^- , $\{-\pi \leq \psi \leq -\pi/2; \sigma = 0\}$ e l^- (ver figura 6.1).

Provaremos agora que $\gamma(+\infty) = (0, 0)$. Seja

$$V(\sigma, \psi) = \frac{1}{4(m-1)+3} \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2},$$

onde $(\sigma, \psi) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$. Observe que $V(0, 0) = 0$, $V(\sigma, \psi) > 0$ para todo $(\sigma, \psi) \neq (0, 0)$ e

$$\frac{dV}{ds} = - \left(\frac{3}{8} \operatorname{sen}^2 \sigma(s) + \frac{4(m-1)-1}{4} \operatorname{sen}^2 \psi(s) \right) < 0$$

para todo $(\sigma(s), \psi(s)) \neq (0, 0)$, isto é, V é uma *função de Liapounov escrita* para a singularidade $(0, 0)$. Portanto, com a função $s \mapsto V(\sigma(s), \psi(s))$ é estritamente decrescente, não existe curva integral fechada em R .

Por outro lado, como os coeficientes angulares de $E^u(0, \pi)$, $E^s(-\pi, 0)$, $E^u(0, -\pi)$ e $E^s(\pi, 0)$ são iguais a l , e os coeficientes angulares de $E^s(0, \pi)$, $E^u(-\pi, 0)$, $E^s(0, -\pi)$ e $E^u(\pi, 0)$ são iguais a

$$-\frac{1}{4(m-1)+3}$$

temos, pelo Teorema das Variedades Estável e Instável, que as únicas curvas integrais contidas em R e nas variedades estáveis ou instáveis dos pontos $(0, \pi)$, $(-\pi, 0)$, $(0, -\pi)$ e $(\pi, 0)$ são l , l^- , γ^- e γ . Mas, pelo Teorema de Separação de Jordan, γ não pode se acumular em l , l^- ou γ^- . Logo, usando o Teorema de Poincaré-Bendixon (ver [13], p. 248), temos que $\gamma(+\infty) = (0, 0)$.

A prova de (ii) segue do fato de ser $(0, 0)$ um ponto de foco da parte linear do sistema (4.12); portanto $(0, 0)$ é também um ponto de foco de (4.12) (ver [7], p. 376). □

Observe que, usando o lema acima (ver figura 6.1), o fato que o campo do sistema diferencial (4.12),

$$X(\sigma, \psi) = \left(-\frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) + \frac{3}{2} \right) \operatorname{sen} \psi, \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sen} \psi \right),$$

satisfaz $X(\sigma + \pi, \psi + \pi) = -X(\sigma, \psi)$ e a periodicidade dos pontos singulares do sistema, temos uma descrição completa (ver figura 6.2) do plano de fase do sistema diferencial (4.12).

Através do comportamento das curvas integrais γ , que nasce em $(\pi, 0)$ e termina em $(0, 0)$, e α , que nasce em (π, π) e termina em $(0, 0)$, do sistema diferencial (4.12), descreveremos o comportamento das curvas soluções de (4.1) com $m = 2, 3$.

À curva $\gamma(s)$ obtida no Lema 6.1 corresponde a sua família $\{\gamma_\lambda(s)\}$, $\lambda > 0$, $-\infty < s < \infty$, de curvas homotéticas, parametrizadas pelo comprimento de arco no plano xy e soluções de (4.1). Cada curva γ_λ , pertencente a família $\{\gamma_\lambda\}$ tem, pelo lema acima e pelo Lema 4.1, o ponto inicial em $(x_o, 0)$, $x_o \neq 0$, e é ortogonal ao eixo $y = 0$ neste ponto. Portanto, pela Proposição 3.1, a curva γ_λ fica inteiramente determinada pelas condições iniciais em qualquer ponto da região $\{(x, y); x > 0, y \geq 0\}$. Além disto, a curva é analítica.

À curva $\alpha(s)$ corresponde a uma família $\{\alpha_\lambda(s)\}$, $\lambda > 0$, $-\infty < s < \infty$, de curvas homotéticas, parametrizadas pelo comprimento de arco no plano xy e soluções de (4.1). Pelo comportamento do campo do sistema diferencial (4.12) e pelo Lema 4.1, temos que cada curva α_λ pertencente a família $\{\alpha_\lambda\}$ não intercepta o bordo de $\pi(\mathbb{R}^{2m})$.

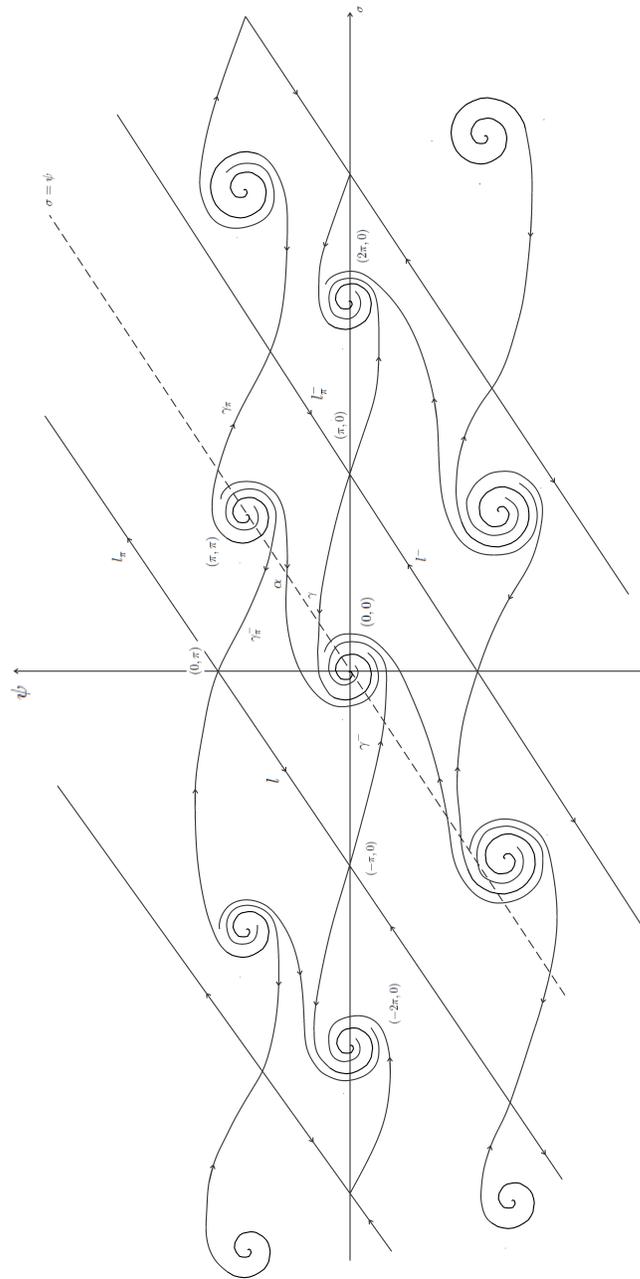


Figura 6.2

Uma vez que $\alpha = \theta - 3\varphi + \frac{\pi}{2}$ e $\psi = \theta + \varphi - \frac{\pi}{2}$, temos que as curvas integrais l_{π}^{-} e l (ver figura 6.2) no plano $\sigma\psi$ correspondem aos semi-eixos $0x$ e $0y$ no plano xy , respectivamente. Além disto, $\gamma^{-}(-\infty) = (-\pi, 0)$ implica $x = 0, y > 0$.

Por outro lado as curvas γ_{π}^{-} e γ_{π} são translações das curvas γ^{-} e γ , respectivamente. Portanto para descrevermos o comportamento das curvas soluções de (4.1) com $m = 2, 3$, que não interceptam os semi-eixos $0x$ e $0y$ ou interceptam ortogonalmente o semi-eixo positivo $0x$, será suficiente a descrição do comportamento das curvas α_{λ} e γ_{λ} , respectivamente.

Começaremos analisando o comportamento da curva γ_{λ} através do lema seguinte.

Lema 6.2. *A curva $\gamma_{\lambda}(s)$ tem as seguintes propriedades (ver figura 6.3):*

- (1) γ_{λ} é mergulhada;
- (2) γ_{λ} intersecta a diagonal $x = y$ uma infinidade de vezes e assintota esta diagonal.

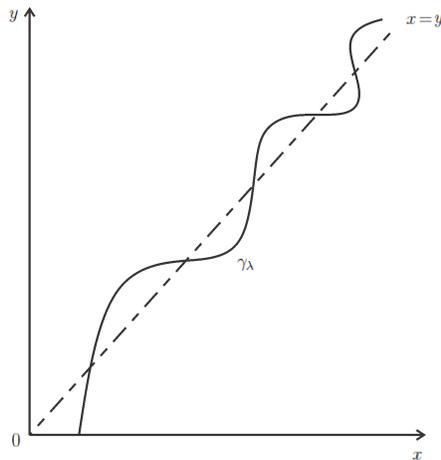


Figura 6.3

Proof. (1) A curva $\gamma_\lambda(s) = (x(s), y(s))$ fica inteiramente determinada pelas seguintes condições iniciais:

$$x(-\infty) = x_o \neq 0, \quad y(-\infty) = 0, \quad x'(-\infty) = 0, \quad y'(-\infty) = 1.$$

Como pelo Corolário 4.1, I é não-decrescente, obtemos, usando que $\sin \theta(s) = y'(s)$ (ver (4.3)),

$$\begin{aligned} [x(s)]^{m-1} &\geq [x(s)]^{m-1} \sin \theta(s) = [x(s)]^{m-1} y'(s) = I(s) \\ &\geq I(\infty) = [x(-\infty)]^{m-1} = x_o^{m-1}, \end{aligned}$$

ou seja (ver figura 6.4), $x(s) \geq x_o$.

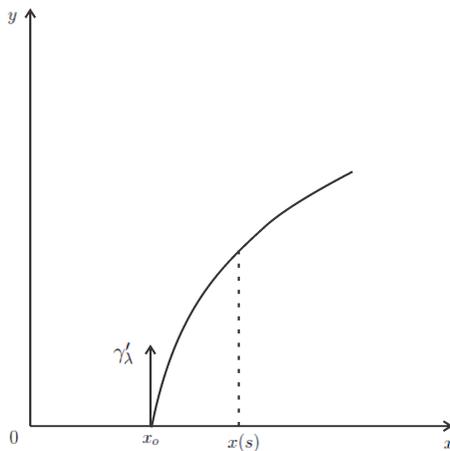


Figura 6.4

Analogamente, obteríamos (ver figura 6.5) $x(s) \geq x(s_o)$ se $s > s_o$, $x(s_o) = x_o \neq 0$, $y(s_o) = y_o$, $x'(s_o) = 0$, $y'(s_o) = 1$.

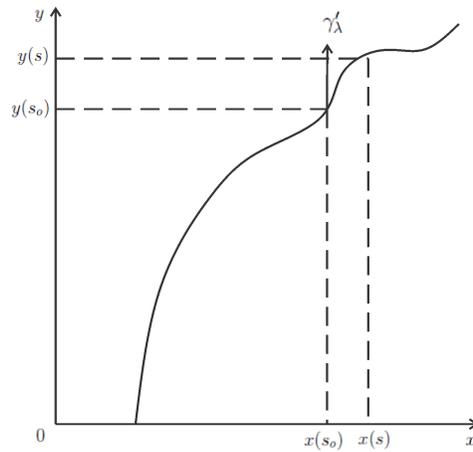


Figura 6.5

Além disto, se $x(s_1) = x_1 \neq 0$, $y(s_1) = y_1 \neq 0$, $x'(s_1) = 1$ e $y'(s) = 0$ temos, pelo Corolário 4.1, que I é não-decrescente. Portanto, usando que $\cos \theta(s) = x'(s)$ (ver (4.3)),

$$\begin{aligned} [y(s)]^{m-1} &\geq [y(s)]^{m-1} \cos \theta(s) = [y(s)]^{m-1} x'(s) = J(s) \\ &\geq J(s_1) = [y(s_1)]^{m-1}, \end{aligned}$$

onde $s > s_1$, ou seja (ver figura 6.5), $y(s) \geq y(s_1)$.

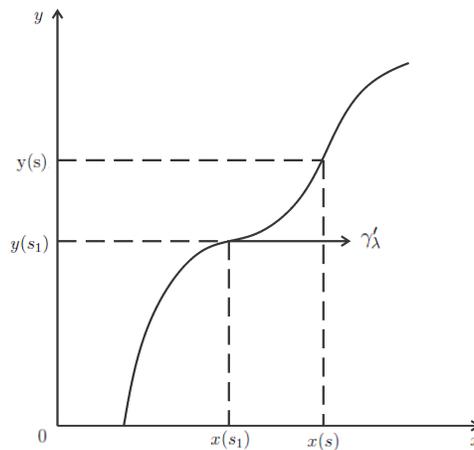


Figura 6.6

Segue-se que γ_λ não se auto-intersecta, isto é, γ_λ é mergulhada.

(2) Como a reta $\sigma = \psi$ intersecta uma infinidade de vezes a curva γ (ver figura 6.2) temos, pelo Lema 4.1, que a reta $x = y$ intersecta γ_λ uma infinidade de vezes. Além disto, $\gamma(+\infty) = (0, 0)$ (ver Lema 6.1) implica (ver Lema 4.1) que $x = y$ e $x' = y' > 0$, ou seja, γ_λ assintota a diagonal $x = y$. \square

Antes de caracterizarmos o comportamento da curva α_λ , necessitaremos da proposição seguinte:

Proposição 6.1. *Seja φ o ângulo no plano xy do vetor posição da curva α_λ com o eixo $0x$ (ver (4.2)). Então os valores de máximo e mínimo locais de φ são atingidos quando $\sigma + \psi = 2k\pi$ ou $\psi - \sigma = (2j + 1)\pi$, $k, j \in \mathbb{Z}$. Além disto,*

$$(6.1) \quad \varphi = \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

quando $k = 0$.

Proof. Utilizando (4.7), temos que

$$(6.2) \quad \varphi = \frac{\psi - \sigma}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Portanto $\varphi'(s) = 0$ é equivalente a $\psi'(s) = \sigma'(s)$. Como

$$\sigma' = -\frac{3}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) + \frac{3}{2}\right) \operatorname{sen} \psi$$

$$\psi' = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \sigma - \left(2(m-1) - \frac{1}{2}\right) \operatorname{sen} \psi,$$

obtemos que $\sigma' = \psi'$ é equivalente a $\operatorname{sen} \sigma = \operatorname{sen}(-\psi)$. Logo $\sigma + \psi = 2k\pi$ ou $\psi - \sigma = (2j + 1)\pi$, onde $j, k \in \mathbb{Z}$. Além disto, por (6.2) temos (6.1) quando $k = 0$. \square

Provaremos agora algumas propriedades da curva α_λ . Como vimos anteriormente, tal curva não intercepta o bordo do espaço de órbitas.

Lema 6.3. *A curva $\alpha_\lambda(s)$ tem as seguintes propriedades (ver figura 6.7):*

- (a) α_λ intersecta a diagonal $x = y$ uma infinidade de vezes e assintota a diagonal quando s tende a $(+\infty)$ e a $(-\infty)$;

(b) α_λ se auto-intersecta.

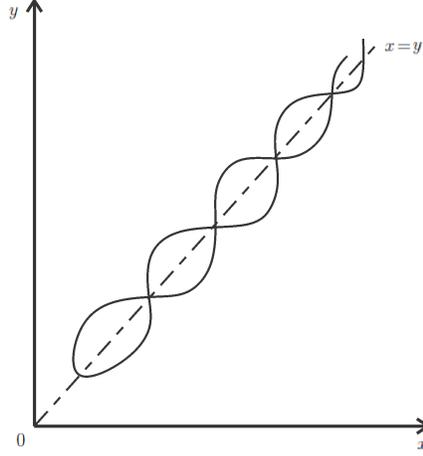


Figura 6.7

Proof. (a) Uma vez que a curva α intersecta a diagonal $\sigma = \psi$ uma infinidade de vezes temos, pelo Lema 4.1, que α_λ intersecta a diagonal uma infinidade de vezes. Portanto $\alpha(-\infty) = (\pi, \pi)$ e $\alpha(+\infty) = (0, 0)$ implicam, pelo Lema 4.1, que $x(s) = y(s)$ e $x'(s) = y'(s) < 0$, quando s tende a $(-\infty)$, e que $x(s) = y(s)$ e $x'(s) = y'(s) > 0$, quando s tende a $(+\infty)$, respectivamente. Assim concluimos (a).

(b) Sejam $\{(\sigma(s_{2m-1}^-), (\psi(s_{2m-1}^-)))\}_{m \geq 1}$ e $\{(\sigma(s_{2m-1}^+), (\psi(s_{2m-1}^+)))\}_{m \geq 1}$ seqüências de pontos da curva α (ver figura 6.8) tais que:

$$\frac{\pi}{2} < \psi(s_1^-) < \psi(s_3^-) < \psi(s_5^-) < \dots < \pi, \quad \sigma(s_{2m-1}^-) + \psi(s_{2m-1}^-) = 2\pi;$$

$$\frac{3\pi}{2} > \psi(s_1^+) > \psi(s_3^+) > \psi(s_5^+) > \dots > \pi, \quad \sigma(s_{2m-1}^+) + \psi(s_{2m-1}^+) = 2\pi,$$

respectivamente. Sejam $\{(\sigma(s_{2m}^-), (\psi(s_{2m}^-)))\}_{m \geq 1}$ e $\{(\sigma(s_{2m}^+), (\psi(s_{2m}^+)))\}_{m \geq 1}$ seqüências de pontos da curva α (ver figura 6.8) tais que

$$-\frac{\pi}{2} < \psi(s_2^-) < \psi(s_4^-) < \psi(s_6^-) < \dots < 0, \quad \sigma(s_{2m}^-) + \psi(s_{2m}^-) = 0;$$

$$\frac{\pi}{2} > \psi(s_2^+) > \psi(s_4^+) > \psi(s_6^+) > \dots > 0, \quad \sigma(s_{2m}^+) + \psi(s_{2m}^+) = 0,$$

respectivamente.

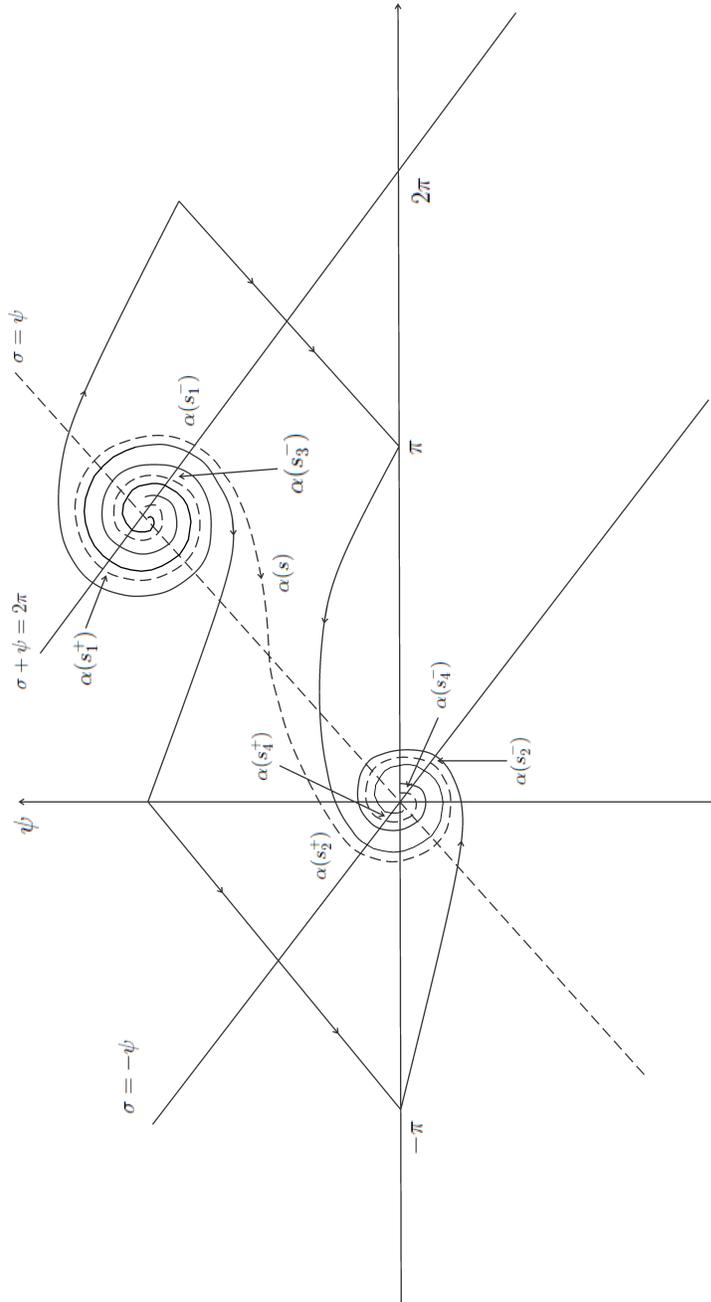


Figura 6.8

Se trasladamos de $(-\pi, -\pi)$ os pontos $\alpha(s_{2m-1}^-)$ e $\alpha(s_{2m-1}^+)$, obtemos

$$(6.3) \quad \psi(s_1^-) - \pi < \psi(s_2^-) < \psi(s_3^-) - \pi < \dots < \psi(s_{2m-1}^-) - \pi < \psi(s_{2m}^-) < \dots,$$

$$\psi(s_2^+) > \psi(s_1^+) - \pi > \psi(s_4^+) > \psi(s_3^+) - \pi > \dots > \psi(s_{2m}^+) >$$

$$\psi(s_{2m-1}^+) - \pi > \dots$$

Como $\varphi = \frac{\psi - \sigma}{4} + \frac{\pi}{4}$, ver (6.2), temos que o valor de φ é invariante se trasladamos de (π, π) um ponto (σ, ψ) . Portanto, por (6.3),

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \varphi(s_1^-) < \varphi(s_2^-) < \varphi(s_3^-) < \varphi(s_4^-) < \dots < \varphi(s_{2m-1}^-) < \varphi(s_{2m}^-) < \dots \\ \varphi(s_2^+) > \varphi(s_1^+) > \varphi(s_4^+) > \varphi(s_3^+) > \dots > \varphi(s_{2m}^+) > \varphi(s_{2m-1}^+) > \dots \end{aligned}$$

Observe que, pela Proposição 4.0.5, s_m^- e s_m^+ , $m \geq 1$, são pontos de mínimo e máximo locais de φ , respectivamente. Além disto, por (6.4), s_1^- e s_2^+ são pontos de mínimo e máximo globais, respectivamente.

Vamos agora mostrar que α_λ se auto-intersecta. Com efeito, consideremos o segmento da curva α_λ que liga os pontos $\alpha_\lambda(s_1^-)$ e $\alpha_\lambda(s_2^+)$. Então $\alpha_\lambda(s_1^+)$ pertence (ver figura 6.9) ou não (ver figura 6.10) ao cone determinado por $0\alpha_\lambda(s_2^+)$, $\alpha_\lambda(s_1^-)\alpha_\lambda(s_2^+)$ e $0\alpha_\lambda(s_1^-)$. No primeiro caso, como, por (6.4), $\varphi(s_1^-) < \varphi(s_{2m-1}^-)$, $\varphi(s_{2m-1}^+) < \varphi(s_2^+)$, $m \geq 2$, e ocorre (a), temos que α_λ se auto-intersecta. No segundo caso, como $\varphi(s_1^-) < \varphi(s_{2m}^-)$, $m \geq 1$, $\varphi(s_{2m}^+) < \varphi(s_1^+)$, $m \geq 2$, e ocorre (a), obtemos que α_λ também se

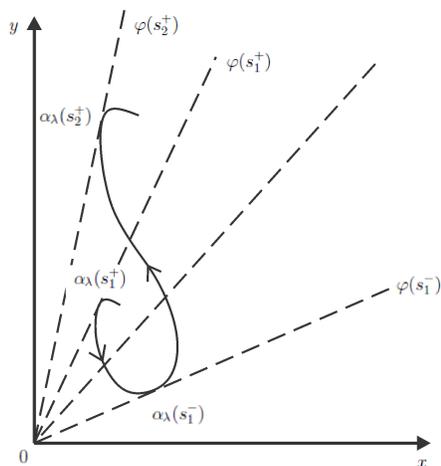


Figura 6.9

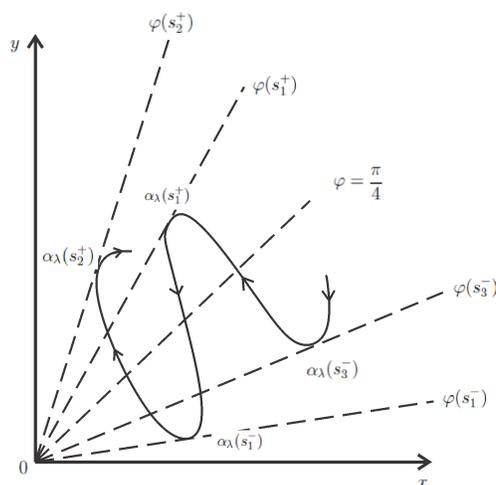


Figura 6.10

auto-intersecta. Isto conclui a nossa afirmação e o Lema 4.0.5. \square

Demonstração do Teorema 6.1

- (i) Como M^{2m-1} é do tipo topológico A, temos que sua curva geratriz pertence a família $\{\gamma_\lambda\}$. Portanto, pelo Lema 6.2 (1), obtemos que sua geratriz é mergulhada. Segue-se o resultado desejado usando a Proposição 3.2.

- (ii) Uma vez que M^{2m-1} é do tipo topológico de um cilindro sua curva geratriz pertence a família $\{\alpha_\lambda\}$. Logo, pelo Lema 6.3 (b), esta curva geratriz se auto-intersecta. Assim, pela Proposição 3.2, M^{2m-1} , se auto-intersecta.

O fato que M^{2m-1} intersecta o cone quadrático mínimo fora de qualquer compacto, e se aproxima arbitrariamente deste cone segue do Lema 6.2 (2) e do Lema 6.3 (a).

Observação 6.1. Decorre da demonstração do Teorema 6.1 o seguinte resultado: $S^{m-1}(1/\sqrt{2}) \times S^{m-1}(1/\sqrt{2}) \subset S^{2m-1}(1)$ é bordo de uma infinidade de subvariedades mínimas de \mathbb{R}^{2m} para $m = 2, 3$. De fato, a curva γ dada pelo Lema 4.0.2 corresponde a uma família de curvas homotéticas $\{\gamma_\lambda\}$, $\lambda > 0$, que intersectam a diagonal $x = y$ uma infinidade de vezes. Logo, existe uma curva γ_λ pertencente a $\{\gamma_\lambda\}$ tal que γ_λ intersecta a diagonal no ponto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Nas demais curvas pertencente a família $\{\gamma_\lambda\}$, fazemos translações convenientes tais que todas as curvas passem pelo ponto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Portanto, as hipersuperfícies mínimas correspondentes às curvas descritas acima provam a nossa afirmação.

No caso em que $m = 2$, Bombieri (ver [5], Teorema 2) deu um esboço da prova deste resultado. Para o caso de superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 , é um problema em aberto saber se uma curva conexa é fronteira de uma infinidade de superfícies mínimas.

7. HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS DE \mathbb{R}^{2m} INVARIANTES POR
 $SO(m) \times SO(m)$ COM $m \geq 4$

Nesta seção vamos determinar todas as hipersuperfícies completas mínimas de \mathbb{R}^{2m} , $m \geq 4$, que são invariantes pela ação de $SO(m) \times SO(m)$, não passam pela origem (as que passam pela origem foram descritas na seção 3) e têm tipo topológico A, isto é, suas curvas geratrizes interceptam o bordo do espaço de órbitas.

A caracterização das hipersuperfícies do tipo topológico de um cilindro está em aberto.

O objetivo desta seção é demonstrar o teorema seguinte.

Teorema 7.1. *As hipersuperfícies completas e mínimas de $\mathbb{R}^{2m} - \{0\}$, $m \geq 4$, invariantes por $SO(m) \times SO(m)$ com tipo topológico A têm as seguintes propriedades:*

- (i) *As hipersuperfícies são mergulhadas;*
- (ii) *As hipersuperfícies folheam \mathbb{R}^{2m} menos o cone quadrático mínimo. Em particular, as hipersuperfícies são estáveis.*

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema 7.1, necessitaremos de um resultado obtido por Bombieri, De Giorgi e Giusti (ver [4], Lema 3) sobre a existência de uma curva integral do sistema diferencial (4.12) com certas propriedades.

Lema 7.1. *Seja $m \geq 4$. Existe uma curva integral $\delta(s) = (\sigma(s), \psi(s))$. No plano $\sigma\psi$ do sistema diferencial (4.12) com as seguintes propriedades (ver figura 7.1):*

- (a) $\delta(-\infty) = (\pi, 0)$, $\delta(+\infty) = (0, 0)$;
- (b) $0 < \psi(s) < \sigma(s) < \pi$, $-\infty < s < +\infty$;
- (c) *As retas $\psi = \sigma - c$, $0 < c < \pi$, intersectam δ uma única vez para cada valor de c .*

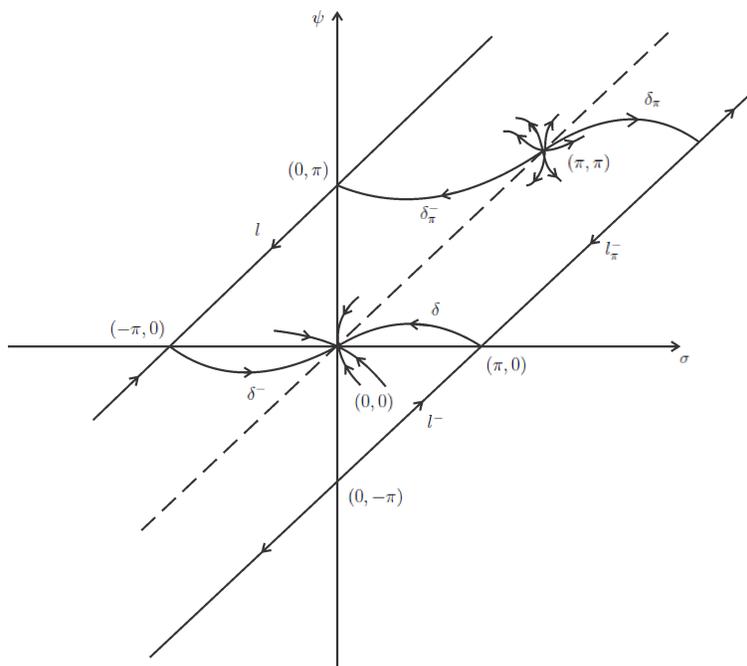


Figura 7.1

Indicaremos por δ^- a curva integral do sistema diferencial (4.12), que é a simétrica da curva δ em relação à diagonal $\sigma = \psi$. As curvas integrais δ_π e δ_π^- são translações de (π, π) das curvas δ e δ^- , respectivamente. Finalmente, l e l_π^- foram definidas na seção anterior.

Pela análise sobre os pontos singulares do sistema diferencial (4.12), com $m \geq 4$, sabemos que os pontos $(0, 0)$ e (π, π) são pontos de nó atrator e repulsor, respectivamente. Portanto as curvas integrais do sistema diferencial (4.12), a menos de translações de (π, π) , são: os pontos singulares, l , l_π^- , δ , δ^- , δ_π , δ_π^- e as trajetórias que nascem em (π, π) e terminam em $(0, 0)$. Observe a descrição das curvas integrais acima estamos usando técnicas análogas as que foram aplicadas para as curvas integrais do sistema diferencial (4.12) com $m = 2, 3$.

Como $\sigma = \theta - 3\varphi + \frac{\pi}{2}$ e $\psi = \theta + \varphi - \pi/2$ (ver (4.7)), temos que as curvas integrais l_π^- e l no plano $\sigma\psi$ correspondem aos semi-eixos $0x$ e $0y$, respectivamente. Além disto, $(\sigma = \pi, \psi = 0)$ e $(\sigma = \pi, \psi = \pi)$ implicam

(ver Lema 4.1) que $x = 0$, $y > 0$ e $x = y$, respectivamente.

Por outro lado, as curvas δ_{π}^- e δ_{π} são translações das curvas δ^- e δ , respectivamente. À curva δ correspondem a uma família $\{\delta_{\lambda}\}$, $\lambda > 0$, de curvas homotéticas, parametrizadas pelo comprimento de arco no plano xy e soluções de (4.1). Cada curva $\delta(s) = (x(s), y(s))$ pertencente a família $\{\delta_{\lambda}\}$ tem, pelos Lema 7.1 e Lema 4.1, o ponto inicial em $(x_o, 0)$, $x_o > 0$, e é ortogonal ao eixo $y = 0$ neste ponto. Logo, pela Proposição 3.1, a curva $(x(s), y(s))$ fica inteiramente determinada em qualquer ponto da região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \geq 0\}$. Além disto, a curva é analítica.

Portanto para a descrição do comportamento das curvas soluções de (4.1) com $m \geq 4$, que interceptam ortogonalmente o semi-eixo positivo $0x$, é suficiente a descrição do comportamento da curva δ_{λ} .

Seja $\theta(s)$ (ver (4.3)) o ângulo no plano xy da tangente à curva $\delta_{\lambda}(s) = (x(s), y(s))$ com o eixo $0x$.

Proposição 7.1. *Seja $\delta_{\lambda}(s) = (x(s), y(s))$ uma curva pertencente à família $\{\delta_{\lambda}\}$. Então $\theta(s)$ é não-crescente.*

Proof. Como $\delta_{\lambda} \in \{\delta_{\lambda}\}$, temos, pelo Lema 5.0.6 juntamente com a Proposição 4.1, $\theta'(s) \neq 0$ para $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x' \neq 0$ e $y' \neq 0$.

Por outro lado, a curva $(x(s), y(s))$ fica inteiramente determinada pelas condições iniciais:

$$x(-\infty) = x_o \neq 0, y(-\infty) = 0, x'(-\infty) = 0, y'(-\infty) = 1.$$

Portanto, como na demonstração do Lema 6.2, item (1), temos $x(s) \geq x_o$. Além disto, $y'(s) \neq 0$. Com efeito, se $x(s_1) = x_1 \neq 0$, $y(s_1) = y_1 \neq 0$, $x'(s_1) = 1$, $y'(s_1) = 0$ temos, como na demonstração do Lema 6.2, item (1), $y(s) \geq y_1$. Assim, concluímos que

$$0 \leq \theta(s) \leq \frac{\pi}{2},$$

isto é, $y'(s) = 0$ implica, usando (4.3), que

$$(7.1) \quad \theta(s_1) = 0.$$

Como, pelo Lema 7.1 e Lema 4.1, a curva $(x(s), y(s))$ está contida na região $\{(x, y), 0 \leq y < x\}$ obtemos

$$(7.2) \quad 0 \leq \varphi(s) < \pi/4$$

Assim, por (4.7), (7.1) e (7.2),

$$\psi(s_1) = \varphi(s_1) - \frac{\pi}{2} < -\pi/4.$$

É isto que contradiz o Lema 7.1 item (b). Logo $\theta(s)$ é não-crescente e

$$\theta'(s) \neq 0,$$

para $x \neq 0$. □

Demonstração do Teorema 7.1

- (i) Como as hipersuperfícies são do tipo topológico A, obtemos que as curvas geratrizes destas hipersuperfícies constituem a família $\{\delta_\lambda\}$.

Como $\sigma = \theta - 3\varphi + \frac{\pi}{2}$ e $\psi = \theta + \varphi - \frac{\pi}{2}$ (ver (4.7)), temos que $\delta(+\infty) = (0, 0)$ implica que $\varphi(s) = \frac{\pi}{4}$ e $\theta(s) = \frac{\pi}{4}$, quando s tende a $(+\infty)$. Logo, cada curva geratriz $\delta_\lambda(s) = (x(s), y(s))$, pertencente a família $\{\delta_\lambda\}$, assintota a reta $y = x - c$, para uma constante c positiva. Como consequência do fato acima e da Proposição 5.0.6, vemos que

$$\frac{\pi}{4} < \theta(s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Segue-se φ é sempre constante. Logo, cada curva geratriz (ver figura 7.2) é mergulhada. Portanto, pela Proposição 3.2, as hipersuperfícies são mergulhadas.

- (ii) Como a curva $(y(s), x(s))$, simétrica em relação à diagonal da curva solução $(y(s), x(s))$, é também uma curva solução (ver figura 7.2), concluímos que as respectivas famílias homotéticas folheam o primeiro quadrante do plano xy . Portanto as hipersuperfícies com estas curvas geratrizes folheam \mathbb{R}^{2m} menos o cone quadrático mínimo.

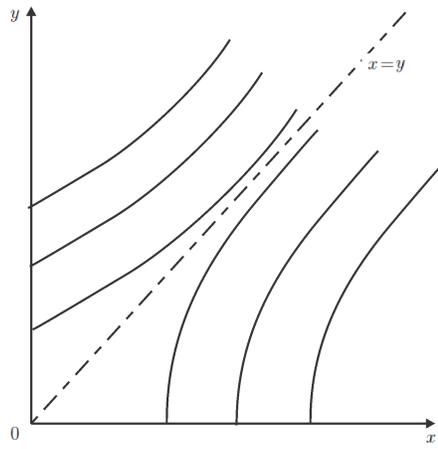


Figura 7.2

8. HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS DE \mathbb{R}^{n+1} CUJOS HIPERPLANOS
TANGENTES OMITEM UM CONJUNTO NÃO-VAZIO DE \mathbb{R}^{n+1}

Sejam M^n uma variedade de dimensão n e $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Para cada ponto $p \in M^n$, seja $(\mathbb{R}^n)_p$ o hiperplano tangente à $X(M^n)$ em $X(p)$.

Indiquemos por

$$W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bigcup_{p \in M} (\mathbb{R}^n)_p$$

o conjunto dos pontos omitidos em \mathbb{R}^{n+1} pelos hiperplanos tangentes à $X(M^n)$.

Em colaboração com Katia Frensel (ver [9], Teorema 2.10) provamos dentre outros resultados o seguinte teorema.

Teorema 8.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima. Se o conjunto W é aberto não-vazio, então $X(M^n)$ é um hiperplano.*

Nesta seção provaremos o teorema acima. Além disto, construiremos exemplos em que $X(M^n)$, $n = 2m - 1$ e $m \geq 4$, não é um hiperplano e W é constituído de pelo menos um ponto.

Demonstração do Teorema 8.1 Sejam $p_o \in W$ e $X(p) - p_o$ o vetor posição com origem em p_o . Como $p_o \in W$, podemos escolher o campo normal unitário N à imersão X tal que a orientação induzida em M torne positiva a função suporte $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$(8.1) \quad g(p) = \langle X(p) - p_o, N(p) \rangle.$$

Como X é uma imersão mínima temos (ver, por exemplo, [3], p. 348) que g satisfaz a seguinte equação:

$$(8.2) \quad \Delta g = -\|B\|^2 g$$

onde Δ é o Laplaciano em M^n e $\|B\|$ é a norma da segunda forma fundamental B da imersão X .

Usando agora o fato de ser o conjunto W aberto, vamos mostrar que g assume um mínimo em um ponto $p \in M^n$. Com efeito, seja $d = \inf\{g(p); p \in M^n\}$. Então existe uma sequência $\{p_k\}_{k \geq 0}$ de pontos

em M^n tal que $g(p_k) \rightarrow d$ quando $k \rightarrow \infty$. Além disto, para cada ponto p_k , consideremos o ponto q_k (ver figura 8.1), interseção de $(\mathbb{R}^n)_{p_k}$ que passa por p_o .

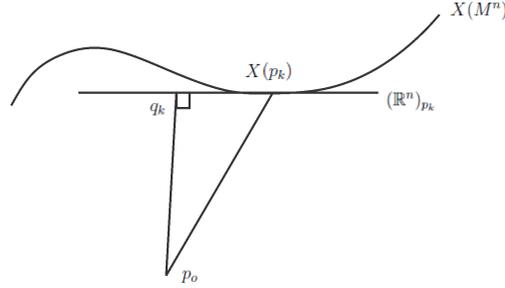


Figura 8.1

Uma vez que $d(p_k, p_o) = g(p_k)$ é uma seqüência limitada, existe uma subsequência $\{q_{k_j}\}_{k_j}$ que converge para um ponto $q \in \mathbb{R}^{n+1}$. Como $\bigcup_{p \in M} (\mathbb{R}^n)_p$ é fechado, pois W é aberto, e $q_k \in (\mathbb{R}^n)_{p_k}$ temos que $q \in (\mathbb{R}^n)_{\bar{p}}$ para algum $\bar{p} \in M^n$. Como $d(p_o, q) = d$ e

$$d \leq d(p_o, (\mathbb{R}^n)_{\bar{p}}) \leq d(p_o, q) = d$$

obtemos que $g(\bar{p}) = d$.

Finalmente, por (8.2) temos $\Delta g \leq 0$. Logo usando o Princípio do Máximo obtemos que g é uma função constante positiva, pois g tem um ponto de mínimo e é positiva. Portanto, da equação (8.2), temos $\|B\| = 0$.

Observação 8.1. Se $W \neq \emptyset$ mostramos, na demonstração do Teorema 8.1, a existência de uma função g positiva que satisfaz

$$\Delta g + \|B\|^2 g = 0.$$

Logo, usando um resultado obtido por Fischer-Colbrie e Schoen (ver [8], Teorema 1), temos que a imersão X é instável.

Observação 8.2. Hasanis e Koutroufiotis (ver [11], Corolário 1) provaram o Teorema 8.1 no caso particular em que $n = 2$, supondo apenas que $W \neq \emptyset$, ou seja, W podendo ser constituído de um único ponto. Este resultado decorre da observação acima, pois o plano é a única superfície mínima estável em \mathbb{R}^3 (ver do Carmo e Peng [6]).

O exemplo seguinte mostra que existem hipersuperfícies mínimas completas estáveis de \mathbb{R}^{2m} com $m \geq 4$, que não são hiperplanos, tais que $0 \in W$. Portanto o resultado de Hasanis e Koutroufiotis não pode ser estendido para dimensão arbitrária sem alguma hipótese adicional.

Exemplo 8.1. As hipersuperfícies completas e mínimas de $\mathbb{R}^{2m} - \{0\}$, $m \geq 4$, invariantes por $SO(m) \times SO(m)$ com tipo topológico A (ver Teorema 7.1) têm a seguinte propriedade:

$$0 \in W.$$

A equação de uma tal hipersuperfície M^{2m-1} de \mathbb{R}^{2m} invariante por $SO(m) \times SO(m)$ pode ser escrita como

$$X = (y x, x y)$$

onde \tilde{x} e \tilde{y} são parametrizações ortogonais de $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ e $(x(s), y(s))$ é a curva geratriz parametrizada pelo comprimento de arco da hipersuperfície.

Consideremos

$$N = (-x' \tilde{x}, y', \tilde{y})$$

o campo normal unitário à hipersuperfície. Logo, por (8.1) com $p_o = 0$, temos

$$g(p) = -x'(s) y(s) + x(s) y'(s).$$

Observe que $0 \in W$ se, e só se, $g(p) \neq 0 \forall p \in M^{2m-1}$. Por outro lado,

$$g = 0 \iff \left(\frac{y}{x} \right)' = 0 \iff \varphi' = 0.$$

Como as curvas integrais δ e δ^- (ver figura 7.1) do sistema diferencial (4.12), $m \geq 4$, não intersectam as retas $\sigma + \psi = 2k\pi$ e $\psi - \sigma = (2j + 1)\pi$, $k, j \in \mathbb{Z}$, temos pela Proposição 6.1 que φ' é sempre diferente de zero. Portanto g é sempre diferente de zero, isto é, $0 \in W$ como havíamos afirmado.

Observação 8.3. Consideremos a hipersuperfície do Exemplo 8.1 tal que sua curva geratriz $(x(s), y(s))$ tem as seguintes condições iniciais:

$$x(0) = x_o > 0, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$

Seja $q_o = (q_1, \dots, q_{2m}) \neq 0$ um ponto arbitrário de \mathbb{R}^{2m} tal que $|q_i| \geq x_o$ para algum $i = m + 1, \dots, 2m$. Então

$$q_o \notin W.$$

Com efeito, usando (8.1) com $p_o = q_o$ obtemos

$$\begin{aligned}
(8.3) \quad g(p) &= -x'(s) y(s) + x(s) y'(s) \\
&+ x'(s) \langle (q_1, \dots, q_m), \tilde{x}(p_1, \dots, p_{m-1}) \rangle \\
&- y'(s) \langle (q_{m+1}, \dots, q_{2m}), \tilde{y}(p_m, \dots, p_{2m-2}) \rangle,
\end{aligned}$$

onde $p = (s, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m, \dots, p_{2m-2})$. Logo, usando as condições iniciais dadas anteriormente sobre a curva $(x(s), y(s))$, temos

$$(8.4) \quad g(p) = x_o - \langle (q_{m+1}, \dots, q_{2m}), \tilde{y}(p_m, \dots, p_{2m-2}) \rangle.$$

Podemos agora escolher (p_m, \dots, p_{2m-2}) tal que o produto interno da expressão (8.4) seja igual a $|q_i| \neq 0$. Como $|q_i| \geq x_o$ segue-se que a função g definida em (8.3) assume um valor não-positivo. Analogamente, podemos escolher outro ponto $(\bar{p}_m, \dots, \bar{p}_{2m-2})$ tal que o produto interno da expressão (8.4) seja igual a $-|q_i|$ e, portanto a função g definida em (8.3) assume um valor não-negativo. Logo existe p tal que $g(p) = 0$, ou seja, $q_o \notin W$.

REFERENCES

- [1] Back, A., Carmo, M. do & Hsiang, W.Y., *On Some Fundamental Equations in Equivariant Riemannian Geometry*, Preprint.
- [2] Barbosa, J.L. & Carmo, M. do, *Helicoids, Catenoids and Minimal Hypersurfaces of \mathbb{R}^n Invariant by an l -Parameter Group of Motions*, An. Acad. Brasil. Ciên. **53**, 403-408 (1981).
- [3] Barbosa, J.L. & Carmo, M. do Carmo, *Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*, Math. z. **185**, 339-353 (1984).
- [4] Bombieri, E., Giorgi, E. De & Giusti, E., *Minimal Cones and the Bernstein Problem*, Inv. Math. **7**, 243-268 (1969).
- [5] Bombieri, E., *Recent Progress in the Theory of Minimal Surfaces*, L'Enseignement Mathém. **25**, 1-8 (1979).
- [6] Carmo, M. do & Peng, C.K., *Stable Complete Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3 are Plane*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **1**, 903-906 (1979).
- [7] Coddington, E.A. & Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Company, Inc. New York 1955.
- [8] Fischer Colbrie, D. & Schoen, R., *The Structure of Complete Stable Minimal Surfaces in 3-Manifolds of Non-Negative Scalar Curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **33**, 199-211 (1980).
- [9] Frensel, K.R., *Estabilidade de Superfícies Completas Orientadas com Curvatura Média Constante e Hipersuperfícies de um Espaço de Curvatura Constante Q cujas Geodésicas Tangentes Omitem um Conjunto Não-Vazio de Q* , Tese de Doutorado (IMPA) 1987.

- [10] Gomes, J. de M., *Sobre Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante no Espaço Hiperbólico*, Tese de Doutorado (IMPA) 1984.
- [11] Hasanis, T. & Koutroufiotis, D., *A Property of Complete Minimal Surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **281**, 833-843 (1984).
- [12] Hsiang, W.Y., Teng, Z.H. & Yu, W.C., *New Examples of Constant Mean Curvature Immersions of $(2k - 1)$ -Spheres into Euclidean $2k$ -Space*, Ann. Math. **117**, 609-625 (1983).
- [13] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides 1979.

Informes de Matemática

Série F

- 001/82 - Atratores Hiperbólicos de Codimensão Um e Classes de Isotopia em Superfícies
Antonio Augusto Gaspar Ruas
- 002/82 - Imersões Mínimas Completas em R^3 do Gênero Um e Curvatura Total Finita
Celso J. Costa
- 003/83 - Contribuições ao Estudo dos Campos Quadráticos no Plano
Rodrigo Eugenio Bamón Cabrera
- 004/84 - Semigrupo Associado a Duas Curvas Planas Irredutíveis Algebróides
Valmecir Antonio dos Santos Bayer
- 005/84 - Diferenciabilidade e Estabilidade de Folheações em Superfícies
Victor Hugo Guíñez M.
- 006/84 - Corpos de Funções Algébricas não Conservativos de Gênero $\frac{p+1}{2}$
Maria Lucia Torres Villela
- 007/85 - Estabilidade de Famílias a um Parâmetro de Campos de Vetores
Rafael Eusebio Labarca Briones
- 008/85 - Estabilidade de Campos de Vetores em Variedades com Singularidades
Paulo Cesar Carrião

- 009/85 - O Anel de Holomorfia p-ádico
Cristina Maria Marques Dutra
- 010/85 - O “ c^r -Closing Lemma” para o Conjunto Recorrente
Generalizado no Plano
Maria Lúcia Alvarenga Peixoto
- 011/85 - Sobre Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante
no Espaço Hiperbólico
Jonas de Miranda Gomes
- 012/86 - Contribuição ao Estudo Local de Fluxos Holomorfos com
Ressonância
Julio César Canille Martins
- 013/86 - Estudo da Matriz de Hasse-Witt por Métodos Locais
Paulo H. Viana
- 014/86 - Estabilidade de Superfícies com Curvatura Média Constante
Alexandre Magalhães da Silveira
- 015/86 - Imersões Conformes com a Mesma Aplicação de Gauss
Enaldo Silva Vergasta
- 016/86 - Superfícies Mínimas, Completas, Não-Orientáveis em R^3
com Curvatura Total Finita
Abdênago Alves de Barros
- 017/87 - Um Algoritmo para Calcular Invariantes Discretos de Primos
Singulares em Corpos de Funções
Hernando Bedoya Rodriguez
- 018/87 - Problemas Hiperbólicos em Simulação de Reservatórios
Hermano Frid Neto
- 019/87 - Pontos Fixos de Automorfismos de Curvas Algébricas
Daniel Levcovitz

- 020/88 - Economias com um Número Infinito de Bens
Paulo Klinger Monteiro
- 021/88 - Estabilidade de Superfícies com Curvatura Média Constante
e Hipersuperfícies cujas Geodésicas Omitem um
Conjunto
Katia Rosenvald Frensel
- 022/88 - IHipersuperfícies Mínimas de R^{2m} Invariantes
Hilário Alencar da Silva

Hilário Alencar

Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, 57072-900, Maceió-AL,
Brazil.

Email: `hilario@mat.ufal.br`