

Alguns Teoremas de Curvas Convexas no Plano

Hilário Alencar Walcy Santos

Prefácio

Neste texto, apresentamos alguns resultados de curvas convexas no plano. Começamos estudando as curvas localmente. O primeiro capítulo apresenta o comportamento de uma curva diferenciável em uma vizinhança de um ponto de seu traço. Aqui, exploramos o conceito de curvatura de uma curva plana, mostrando que ela determina a curva, a menos de sua posição no plano. Depois estudamos as curvas convexas no plano. Além das propriedades geométricas de tais curvas, introduzimos a noção de largura de uma curva e fazemos uma introdução às curvas de largura constante.

Este texto é parte adaptada do Livro Geometria Diferencial das Curvas Planas dos mesmos autores ([AS]).

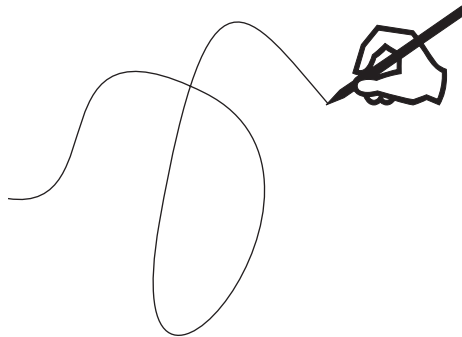
Sumário

1	Curvas Planas	7
1.1	Curvas Suaves	22
1.2	Vetor Tangente - Reta Tangente	24
1.3	Reparametrização	28
1.4	Comprimento de Arco	28
1.5	Campo de Vetores ao Longo de Curvas	34
1.6	Curvatura e Fórmulas de Frenet	37
1.7	Teorema Fundamental das Curvas Planas	46
1.8	Forma Canônica Local	48
1.9	Evolutas e Involutas	50
1.10	Número de Rotação de uma Curva Fechada	56
1.11	Curvatura Total	64
1.12	Índice de Rotação de Curvas Fechadas Simples	68
2	Curvas Convexas	71
2.1	Curvas Fechadas e Convexas	73
2.2	Teorema de Schur	90
2.3	Curvas de Largura Constante	95
2.4	Comprimento e Área de Curvas Convexas	106
2.5	Curvas Paralelas	114
	Referências Bibliográficas	117

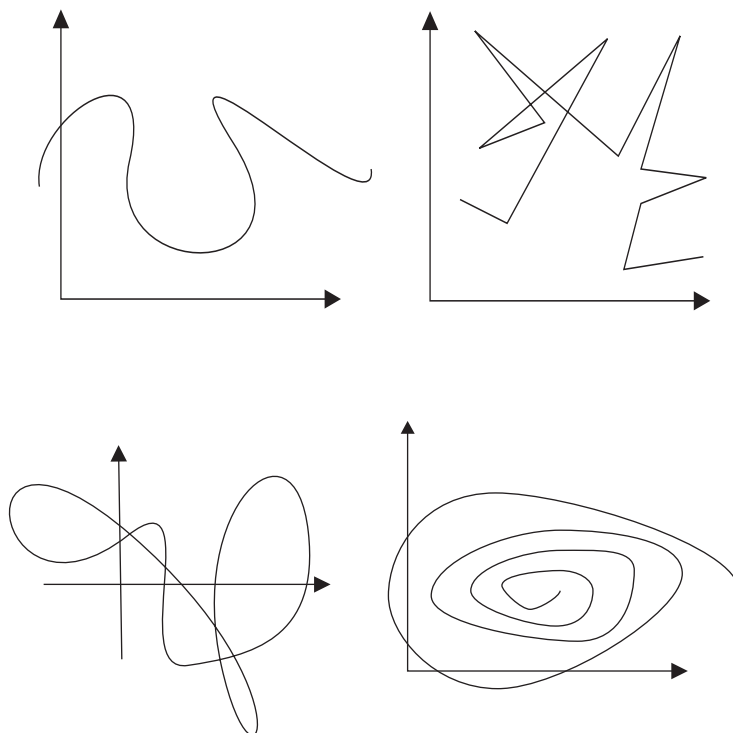
Capítulo 1

Curvas Planas

Intuitivamente, gostaríamos de pensar em uma curva no plano como um subconjunto que *tenha dimensão igual a 1*, por exemplo, o gráfico de funções de uma variável real ou figuras “*desenhadas*” com um único traço, sem tirar o lápis do papel. De forma um pouco mais precisa, uma curva é uma deformação contínua de um intervalo, ou ainda, a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano.



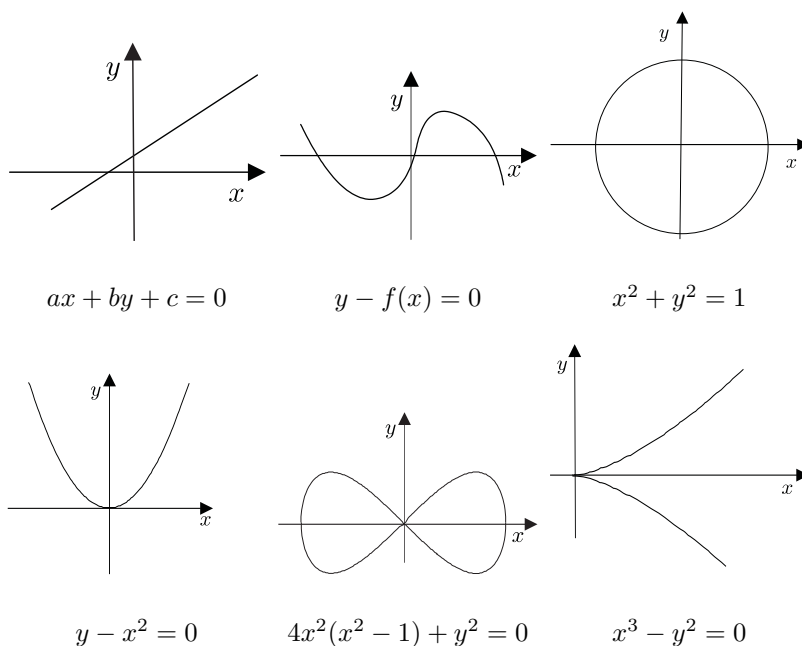
Como exemplos dos objetos que queremos definir, veja as figuras a seguir:



Tornar essas idéias mais precisas e aplicáveis pode ser um trabalho longo e difícil. Um primeiro ponto de vista, inspirado na Geometria Analítica, seria considerar uma curva em \mathbb{R}^2 como o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem uma equação do tipo

$$F(x, y) = 0.$$

Muitos exemplos que gostaríamos de considerar como curvas estão nessa classe de subconjuntos do plano, veja as figuras a seguir:



Mesmo para funções muito bem comportadas, esse tipo de conjunto pode ficar muito longe da idéia do que consideramos uma curva. Por exemplo, para a função definida por $F(x, y) = xy$, a equação $F(x, y) = 0$ descreve o conjunto formado pelos eixos coordenados, que aparentemente não se enquadra na nossa idéia original, ou seja, de uma figura “traçada” sem tirarmos o lápis do papel. Por outro lado, existem conjuntos que gostaríamos de considerar como curvas e que não podem ser descritos desse modo. Em muitas situações, considerar o caso especial em que curvas são descritas por uma equação da forma $F(x, y) = 0$ pode ser útil. Um caso especialmente importante é quando $F(x, y)$ é um polinômio em duas variáveis. Nesse caso, o conjunto $F(x, y) = 0$ é chamado uma curva algébrica. O estudo desse tipo de “curva” é o ponto inicial da Geometria Algébrica,

um importante ramo da Matemática.

No contexto de Geometria Diferencial, em vez de considerarmos curvas definidas por equações, vamos retornar à idéia intuitiva que uma curva deve descrever a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. Se considerarmos que um ponto $\alpha(t)$ representa a posição de uma partícula em movimento contínuo, quando o tempo t varia em um intervalo $[a, b]$, o conjunto que iremos considerar é $\mathcal{C} = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [a, b]\}$. A vantagem dessa abordagem é que ela poderá ser facilmente formalizada e conterà várias informações sobre como o ponto $\alpha(t)$ percorre o conjunto \mathcal{C} , o sentido que o ponto “anda” sobre \mathcal{C} : podemos definir sua velocidade, sua aceleração, etc.. Vamos introduzir a definição formal de curva.

Definição 1.1 *Uma curva contínua no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A aplicação α , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é contínua, se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.*

O conjunto imagem \mathcal{C} da aplicação α , dado por

$$\mathcal{C} = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I\},$$

é chamado de *traço* de α . Observe que, com a definição acima, estamos estudando todo o movimento da partícula e não apenas o conjunto \mathcal{C} . Nesse caso, α é dita uma parametrização de \mathcal{C} e denominamos t o parâmetro da curva α .

Se a curva α está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$, os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são chamados de ponto inicial de α e ponto final de α , respectivamente.

Se α está definida num intervalo $I = [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$, dizemos que α é uma curva *fechada*. Uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *periódica* se existe um número real $l > 0$, tal que

$$\alpha(t + l) = \alpha(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor valor l_0 para o qual a equação acima se verifica é chamado de *período* de α . É claro que a curva α fica completamente determinada por sua restrição a um intervalo da forma $[t_0, t_0 + l_0]$.

Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *simples*, se a aplicação α for injetiva. Quando temos que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$, dizemos que α possui um ponto duplo (ou múltiplo) em t_1 e t_2 . Uma curva fechada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *fechada e simples*, se $\alpha(t) \neq \alpha(s)$ para todo $t \neq s \in [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$, isto é, se o único ponto duplo de α ocorre nos seus pontos inicial/final. Quando α é uma curva fechada e simples, ela é denominada *curva de Jordan*. Em muitas situações, quando não houver prejuízo no entendimento, iremos denominar o traço de uma curva de Jordan também como curva de Jordan.

Vamos encerrar esta seção com alguns exemplos ilustrativos de curvas contínuas no plano.

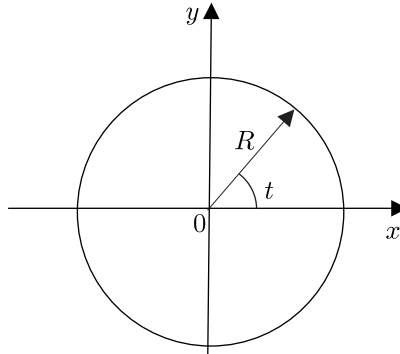
1. Círculos e elipses

O círculo de raio R e centro na origem O , $S_R(O)$, é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja distância ao ponto $(0, 0)$ é constante e igual a R , isto é,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

O círculo $S_R(O)$ é o traço da curva contínua α , definida por $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. O parâmetro t representa o ângulo que $\alpha(t)$ faz com o eixo Ox . Mais geralmente, o círculo de centro (a, b) e raio R , $S_R((a, b))$, é o traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$. Observe que α é uma curva periódica de período 2π e, portanto, quando t percorre a reta real, $\alpha(t)$ move-se sobre $S_R((a, b))$ no sentido anti-horário um número infinito de vezes. Se restringimos o domínio de α a um intervalo

de comprimento 2π então $\alpha(t)$ percorrerá $S_R((a, b))$ uma única vez. A curva $\alpha|_{[0, 2\pi]}$ é uma curva de Jordan.



A curva $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t),$$

é uma outra parametrização de $S_R(O)$. Tal curva também percorre $S_R(O)$ no sentido anti-horário, porém com o dobro da velocidade escalar de α .

A elipse de focos P_1 e P_2 é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja soma das distâncias aos pontos P_1 e P_2 é uma constante. Se escolhermos o sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de modo que $P_1 = (-c, 0)$ e $P_2 = (c, 0)$, com $c > 0$, então a elipse é descrita por uma equação da forma

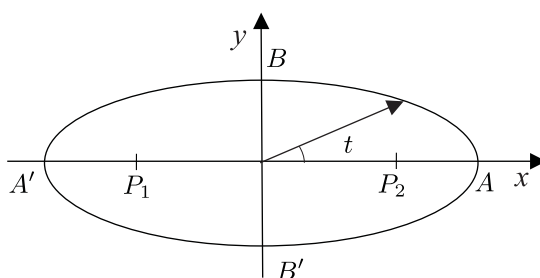
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com a, b números reais positivos. Seja $(x, y) \neq (0, 0)$ e considere t o ângulo que o vetor com ponto inicial na origem e ponto final (x, y) faz com o semi-eixo Ox positivo.

Agora podemos parametrizar a elipse pelo traço da curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad a, b > 0.$$

A elipse intersecta os eixos coordenados nos pontos $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ e $B' = (0, -b)$. Os segmentos AA' e BB' são chamados de eixos da elipse.

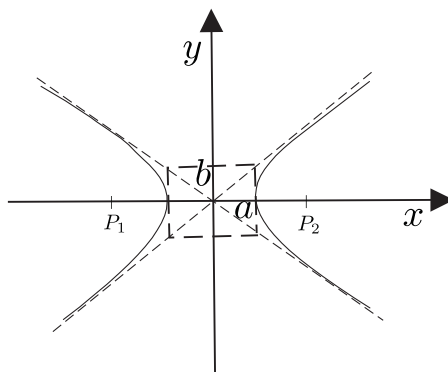


2. Hipérbole

A hipérbole de focos P_1 e P_2 é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja diferença das distâncias aos pontos P_1 e P_2 é, em valor absoluto, uma constante. Se escolhermos o sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 , tal que $P_1 = (-c, 0)$ e $P_2 = (c, 0)$ com $c > 0$, então a hipérbole (veja figura a seguir) é descrita por uma equação do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde a e b são números reais e positivos.



Consideremos as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico dadas, respectivamente, por

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

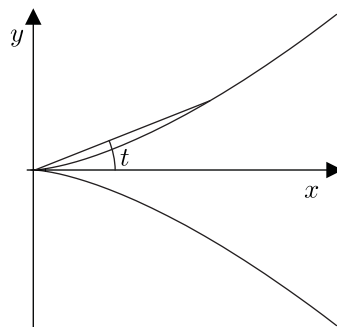
Logo, como $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, podemos parametrizar o ramo direito da hipérbole pelo traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (a \cosh t, b \sinh t).$$

3. Parábola de Neill

A parábola de Neill, veja figura abaixo, é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $x^3 - y^2 = 0$. Seja $(x, y) \neq (0, 0)$ e considere θ o ângulo que o vetor com ponto inicial na origem e ponto final (x, y) faz com o semi-eixo Ox positivo e seja $t = \tan \theta$. Assim podemos parametrizar a parábola de Neill pelo traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (t^2, t^3).$$



4. Gráficos

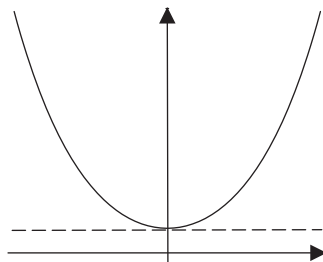
Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^k . O conjunto

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

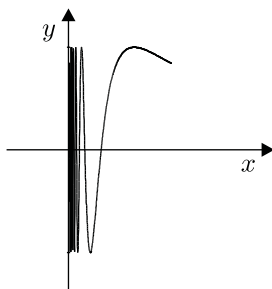
é chamado de gráfico de f . É claro que \mathcal{G} pode ser, naturalmente, parametrizado pela curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^k , dada por

$$\alpha(t) = (t, f(t)).$$

Por exemplo, se consideramos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t) = \frac{a}{2} (e^{t/a} + e^{-t/a}) = a \cosh(t/a)$, onde a é uma constante positiva, obtemos que o gráfico de f , ou equivalentemente, o traço de α descreve uma catenária. A catenária é a curva obtida quando uma corda de peso uniforme é presa em dois pontos e é deixada sob a ação da força gravitacional. A catenária tem outros interesses geométricos, como no estudo de superfícies minimizantes de área.



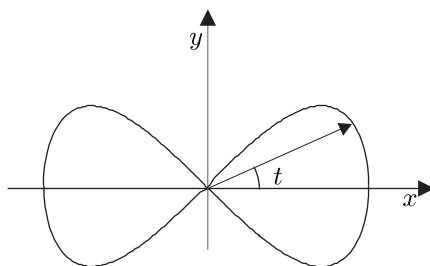
Um outro exemplo de uma curva dessa forma é obtido quando consideramos $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sin(1/x)$. Observe que nenhum ponto do segmento $\{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$ pertence ao gráfico de f , porém existem pontos do gráfico de f arbitrariamente próximos de cada ponto desse segmento.



5. Lemniscata

A lemniscata, veja figura abaixo, é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$. Agora consideremos t o ângulo entre um vetor de \mathbb{R}^2 , com ponto final (x, y) , e o eixo Ox . Podemos, portanto, parametrizar a lemniscata pelo traço da curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin 2t).$$

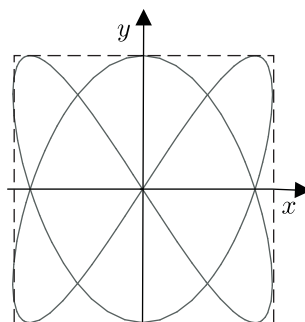


6. Curvas de Lissajous

Vamos descrever apenas uma classe especial dessas curvas, as quais aparecem na Mecânica, quando duas oscilações elásticas ocorrem simultaneamente em planos ortogonais, por exemplo, os pêndulos duplos. A curva de Lissajous é o traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (\text{sen } at, \text{sen } bt), \quad a, b > 0, \quad a \neq b.$$

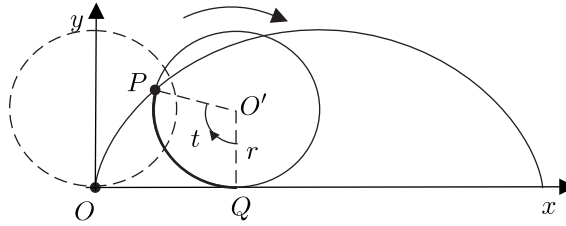
Note que a lemniscata é um caso particular da curva de Lissajous, quando $a = 1$ e $b = 2$. A figura abaixo mostra um esboço do traço de α no caso em que $a = 2$ e $b = 3$.



Observe que o traço de α está contido no quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$. A curva α é periódica, se e somente se a/b é um número racional.

7. Ciclóide

A cicloide é a trajetória descrita por um ponto $P = (x, y)$ de \mathbb{R}^2 , localizado no círculo de raio r e centro O' , que gira ao longo do eixo Ox , sem escorregar e com aceleração escalar constante. Seja u o vetor com ponto inicial em O' e ponto final em P , e seja t o ângulo descrito pelo vetor u , supondo que P coincida com a origem O , quando $t = 0$, conforme a figura abaixo.



Então o arco \widehat{QP} tem o mesmo comprimento que o segmento com ponto inicial na origem O e ponto final Q , onde Q é o ponto de interseção entre o círculo e o eixo Ox . Concluimos que rt e r são abscissa e ordenada, respectivamente, de O' e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} x &= rt - r \cos \left(\frac{3\pi}{2} - t \right) = rt - r \sin t \\ y &= r - r \sin \left(\frac{3\pi}{2} - t \right) = r - r \cos t \end{aligned} \quad (1.1)$$

são as coordenadas de P . Logo podemos descrever a cicloide, como sendo o traço da curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t).$$

Notamos que é possível eliminar t nas equações (1.1). De fato, usando essas equações, $\cos t = 1 - \frac{y}{r}$ e, portanto, $t = \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right)$. Assim

$$\operatorname{sen} t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} = \pm \frac{\sqrt{(2r - y)y}}{r}$$

e obtemos a equação cartesiana da cicloide, dada por

$$x = r \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) \mp \sqrt{(2r - y)y}.$$

8. Espirais

A espiral de Arquimedes, veja figura a seguir, é o conjunto de pontos (x, y) de \mathbb{R}^2 , tal que

$$x \tan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = y, \quad a > 0.$$

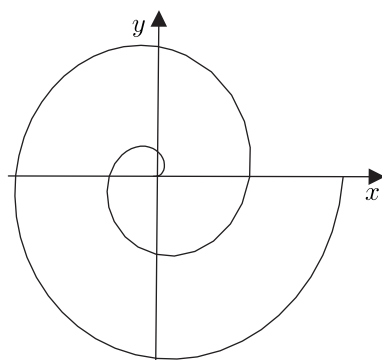
Observamos que, em coordenadas polares, sua equação é dada por

$$r = a\theta, \quad a > 0.$$

Logo podemos descrever a espiral de Arquimedes, como sendo o traço da curva $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(t) = (at \cos t, at \operatorname{sen} t).$$

Esboçamos abaixo a espiral de Arquimedes com $a = 1$.

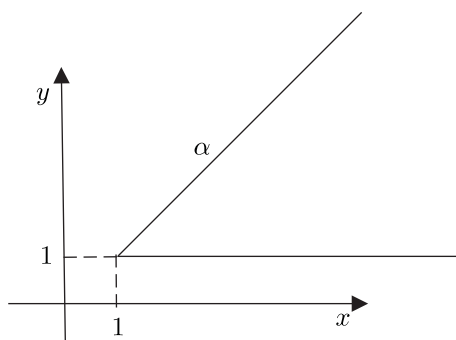


9. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & \text{se } t \neq 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

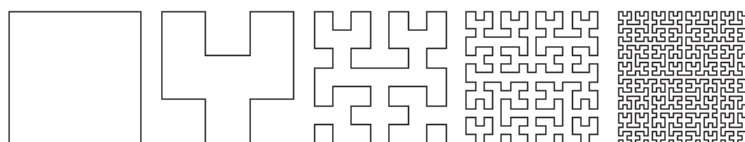
A curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (f(t) + 1, g(t) + 1)$, é uma curva contínua cujo traço é a união das semi-retas $y = x$, $x \geq 1$ e $y = 1$, $x \geq 1$.



Observe que as funções x e y são diferenciáveis em \mathbb{R} , porém $x'(0) = y'(0) = 0$. Este exemplo mostra que o traço de uma curva pode ter “*bicos*”, mesmo quando suas coordenadas são funções diferenciáveis.

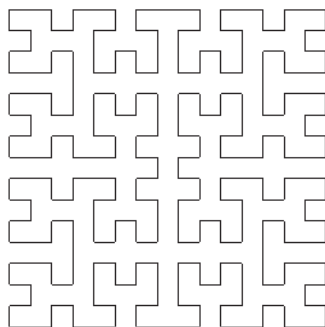
10. Curvas que preenchem o espaço - Curva de Peano e curva de Hilbert:

Essas curvas foram pesquisadas originalmente pelo matemático Giuseppe Peano no século XIX, e como homenagem ao pesquisador, as curvas de preenchimento do espaço são referenciadas como curvas de Peano. Outros pesquisadores, como David Hilbert, deram continuidade a pesquisa das curvas de preenchimento do espaço estendendo-as para espaços n -dimensionais. As curvas de Peano-Hilbert funcionam baseadas na partição do espaço, de forma contínua e única. Como cada partição é um subespaço similar ao original, a construção pode ser novamente aplicada a cada partição, gerando novas partições e assim sucessivamente. A curva de Hilbert é a aplicação limite desse processo, aplicado ao conjunto formado por três segmentos de reta de comprimento um, dois a dois ortogonais, formando uma figura “U”. As figuras a seguir mostram os traços das cinco primeiras etapas da construção da curva de Hilbert.



A curva limite obtida por este processo será uma curva contínua cujo traço é todo o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. E.

Moore obteve uma construção similar, tomando-se inicialmente um quadrado, construiu uma curva, chamada *curva de Moore*, cujo traço preenche $[0, 1] \times [0, 1]$, porém em cada etapa da construção, temos uma curva de Jordan. A figura a seguir mostra a quarta etapa da construção da curva de Moore.



Podemos fazer uma construção similar a essa, onde, em cada etapa, temos uma curva de Jordan diferenciável. Veja as figuras a seguir:



1.1 Curvas Suaves

Nesta seção, vamos estudar localmente uma curva α no plano, isto é, fixado t_0 , estudaremos como se comporta $\alpha(t)$ para valores de t próximo de t_0 . Para este estudo, o ideal seria que pudéssemos ter uma reta que fosse uma boa aproximação para

esta curva numa vizinhança de um ponto sobre a curva. No entanto, somente com a definição de curvas contínuas, isso nem sempre é possível. Se escrevemos α como

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)),$$

então α é uma aplicação *suave*, se e somente se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^∞ , isto é, x e y possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto de I . Assim, podemos introduzir o seguinte conceito:

Definição 1.2 *Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação suave*

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$. Quando não houver prejuízo do entendimento, iremos nos referir a tais curvas simplesmente como *curvas parametrizadas* ou *curvas suaves*.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1 *(Curva constante) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\alpha(t) = (a, b)$$

é uma curva parametrizada cujo traço se reduz ao ponto (a, b) .

Exemplo 1.2 *Considere $P = (a_0, b_0) \neq Q = (a_1, b_1)$ pontos de \mathbb{R}^2 . A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por*

$$\alpha(t) = P + t(P - Q) = (a_0 + t(a_1 - a_0), b_0 + t(b_1 - b_0)),$$

é uma curva parametrizada cujo traço é a reta que passa por P e Q .

Seja $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação definida por

$$\beta(t) = P + t^3(P - Q) = (a_0 + t^3(a_1 - a_0), b_0 + t^3(b_1 - b_0)).$$

A aplicação β também é uma curva parametrizada cujo traço é a reta que passa por P e Q . Observemos que α e β possuem o mesmo traço. A diferença entre essas curvas está na velocidade que seu traço é percorrido.

Exemplo 1.3 A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (t, |t|),$$

não é uma curva parametrizada suave. De fato, a função y , definida por $y(t) = |t|$, não é diferenciável em $t = 0$. Porém, a restrição de α , a qualquer intervalo que não contém o ponto $t = 0$, é uma curva parametrizada.

1.2 Vetor Tangente - Reta Tangente

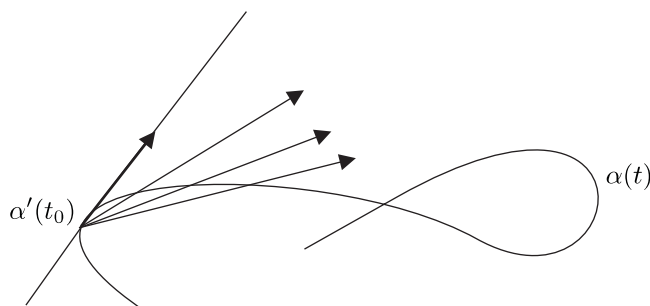
Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor tangente (ou vetor velocidade) de α em $t_0 \in I$ é dado por

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

A velocidade escalar de α em $t_0 \in I$ é dada pelo módulo do vetor velocidade $\alpha'(t_0)$, isto é,

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

Quando $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, tal vetor aponta na direção tangente à curva α em t_0 .



O vetor $\alpha'(t_0)$ aponta na direção da reta tangente à curva α no ponto $\alpha(t_0)$ e esta reta é a reta limite das retas secantes à curva α passando por $\alpha(t_0)$ e por $\alpha(t)$, quando fazemos t tender a t_0 .

Definição 1.3 Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t_0 \in I$, se $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, ou equivalentemente, se $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$. A curva α é regular em I , se α for regular para todo $t \in I$. Se $\|\alpha'(t_0)\| = 0$, dizemos que α é singular em t_0 e $\alpha(t_0)$ é chamada uma singularidade de α .

Como afirmamos, se α for uma curva regular, o vetor $\alpha'(t)$ aponta para a direção tangente à curva α no ponto $\alpha(t)$ e podemos, portanto, definir a reta tangente à curva α em $\alpha(t)$ por

$$r_t(u) = \alpha(t) + u\alpha'(t),$$

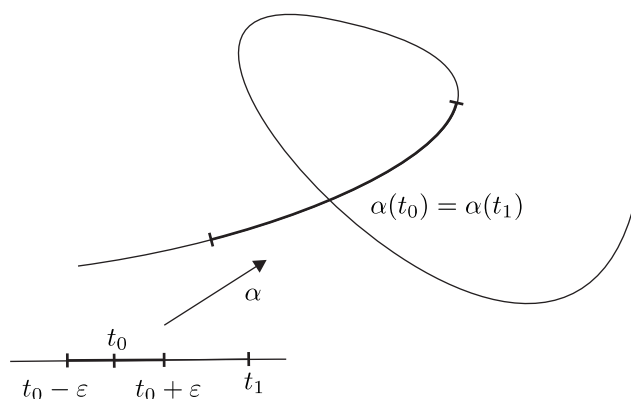
onde $u \in \mathbb{R}$.

Veremos mais adiante que a reta $r_{t_0}(u)$ é a melhor aproximação linear de α em t_0 .

Intuitivamente, o traço de uma curva regular é suave, sem bicos, exceto por possíveis pontos de auto-interseção. Localmente, porém, α não tem auto-interseção como mostra o resultado seguinte.

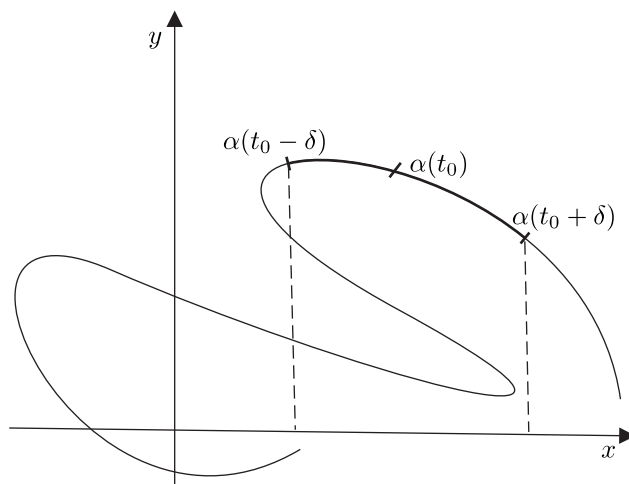
Proposição 1.1 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e regular em $t_0 \in I$. Então existe $\varepsilon > 0$, tal que α é injetiva no intervalo $I_0 = \{t \in I \mid |t - t_0| < \varepsilon\}$.

Prova: Como $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, temos que $x'(t_0) \neq 0$ ou $y'(t_0) \neq 0$. Vamos supor que $x'(t_0) \neq 0$. Logo, visto que x' é uma função contínua, existe $\varepsilon > 0$, tal que $x'(t) \neq 0$, para todo $t \in I_0$. Nesse caso, x é estritamente monótona e, portanto injetiva, o que implica que $\alpha|_{I_0}$ é injetiva. A prova no caso em que $y'(t_0) \neq 0$, é análoga. \square



Um exemplo de curva parametrizada e regular é dado por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (t, f(t))$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. O traço de α é igual ao gráfico de f . Como $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$, $\forall t \in I$, α é uma curva parametrizada e regular. Vamos provar que localmente toda curva regular é dessa forma.

Proposição 1.2 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e regular em $t_0 \in I$. Então, existe $\delta > 0$, tal que, restrito ao intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, o traço de α coincide com o traço de uma curva β da forma $\beta(t) = (t, f(t))$ ou $\beta(t) = (f(t), t)$, para uma função diferenciável $f : J \rightarrow \mathbb{R}$.*



Prova. Seja α dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Como α é regular em $t = t_0$, temos que

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0).$$

Vamos supor que $x'(t_0) \neq 0$. Nesse caso, pelo teorema da função inversa, existe um intervalo $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$, tal que a função x é um difeomorfismo, isto é, uma função diferenciável com inversa diferenciável, sobre $J = x((t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1))$. Seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = \alpha(x^{-1}(t))$. Temos portanto, que β é uma curva diferenciável e

$$\beta(t) = (x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t))) = (t, f(t)),$$

onde f , dada por $f(t) = y(x^{-1}(t))$, é uma função diferenciável. A prova, no caso em que $y'(t_0) \neq 0$, é análoga e, nesse caso, obtemos que o traço de α coincide localmente em $\alpha(t_0)$ com o traço de uma curva da forma $\beta(t) = (f(t), t)$.

□

1.3 Reparametrização

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, e seja $h : J \rightarrow I$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ . Podemos então considerar uma nova curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)).$$

A curva β é, portanto, uma curva parametrizada de classe \mathcal{C}^∞ . Dizemos que a curva β é uma *reparametrização* de α . Pela regra da cadeia, temos que

$$\beta'(t) = (x'(h(t))h'(t), y'(h(t))h'(t)),$$

ou ainda,

$$\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t).$$

A velocidade escalar de β é dada por

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| |h'(t)|.$$

Vamos considerar apenas reparametrizações onde a função h é estritamente monótona. Nesse caso, $h'(t) \neq 0$ e, portanto, se α for uma curva regular em I , sua reparametrização $\beta = \alpha \circ h$ também será regular em J . Se h é estritamente crescente, dizemos que a reparametrização $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização positiva ou própria, ou que preserva a orientação de α . No caso em que h é estritamente decrescente, a reparametrização é dita negativa ou que reverte a orientação de α .

1.4 Comprimento de Arco

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

A função $L_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi, \quad (1.2)$$

$t_0 \in I$, é denominada *comprimento de arco*. Como $\|\alpha'(t)\|$ é uma função contínua, a função L_α é de classe \mathcal{C}^1 e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|. \quad (1.3)$$

Observe que, se α for regular em I , então a função L_α é de fato de classe \mathcal{C}^∞ .

Para $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in I$, chamamos comprimento de arco de α entre os pontos t_1 e t_2 ao número

$$L(\alpha|_{[t_1, t_2]}) = L_\alpha(t_2) - L_\alpha(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Note que a definição acima não depende da escolha do ponto $t_0 \in I$. De fato, se dado $\tilde{t}_0 \in I$, definimos

$$\tilde{L}_\alpha(t) = \int_{\tilde{t}_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Então

$$L_\alpha(t) - \tilde{L}_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi - \int_{\tilde{t}_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Logo concluímos que a função comprimento de arco de α está determinada de forma única, a menos de uma constante.

Definição 1.4 Dizemos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se o parâmetro t é, a menos de constante, igual a $L_\alpha(t)$, isto é,

$$L_\alpha(t) = t + C.$$

Observe que, se $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$, então

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t d\xi = t - t_0,$$

e, portanto, α está parametrizada pelo comprimento de arco. Reciprocamente, se

$$L_\alpha(t) = t + C,$$

obtemos que

$$\|\alpha'(t)\| = L'_\alpha(t) = 1.$$

Provamos então o resultado seguinte.

Proposição 1.3 *Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se*

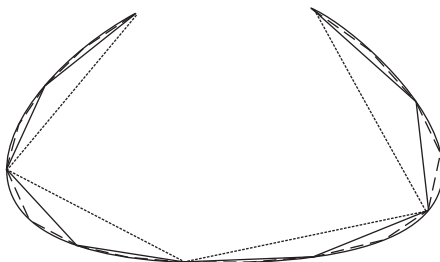
$$\|\alpha'(t)\| \equiv 1.$$

Observação 1.1 *Se $I = [a, b]$, então o comprimento de α existe e é dado por*

$$L(\alpha) = L_\alpha(b) - L_\alpha(a).$$

Dizemos que uma poligonal $\mathcal{P} = \overline{P_0P_1} \cup \dots \cup \overline{P_{n-1}P_n}$ está inscrita em uma curva α de traço C se $\mathcal{P} \cap C = \{P_0, \dots, P_n\}$. É possível provar, usando as idéias do Cálculo Diferencial, que L é dado por

$L(\alpha) = \sup\{L(\mathcal{P}), \text{sendo } \mathcal{P} \text{ uma curva poligonal inscrita em } \alpha, \text{ ligando } \alpha(a) \text{ e } \alpha(b)\}.$



O comprimento de α é aproximado pelo comprimento de poligonais inscritas no traço de α .

Os dois exemplos a seguir mostram que a definição de comprimento de arco coincide com fórmulas conhecidas da Geometria Elementar.

Exemplo 1.4 *Sejam $A, B \in \mathbb{R}^2$, e seja $V_0 = B - A$. A reta que passa por A e B pode ser parametrizada por $\alpha(t) = A + tV_0$, $t \in \mathbb{R}$. Para $t_0 = 0$, temos*

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_0^t \|V_0\| d\xi = \|B - A\|t.$$

Em particular, o segmento de reta que liga A a B tem comprimento $L(\alpha|_{[0,1]}) = \|B - A\|$.

Exemplo 1.5 *Considere o círculo de raio R parametrizado por $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$. Visto que $\|\alpha'(t)\| = R$, temos $L_\alpha(t) = Rt$, tomando $t_0 = 0$. Em particular, se consideramos $\alpha|_{[0,2\pi]}$, o comprimento de α é $2\pi R$. Se damos k voltas em torno da origem, isto é, se tomamos $\alpha|_{[0,2k\pi]}$, temos que o comprimento de α é $2k\pi R$.*

O próximo exemplo mostra que o fato de $L_\alpha(t)$ sempre existir para curvas parametrizadas, a integral de (1.2) nem sempre pode ser expressa em termos de funções elementares.

Exemplo 1.6 Considere a elipse parametrizada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Temos

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 \xi + b^2 \cos^2 \xi} \, d\xi,$$

que não pode ser expressa em termos de funções elementares.

Vejamos que o comprimento de uma curva pode ser finito, mesmo que o seu intervalo de definição tenha comprimento infinito.

Exemplo 1.7 A espiral $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$, definida em \mathbb{R} é tal que

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| \, d\xi = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Em particular, $L(\alpha|_{[0,+\infty)}) = \lim_{t \rightarrow \infty} L_\alpha(t) = \sqrt{2}$ e $L(\alpha|_{(-\infty,0]})$ é infinito.

O próximo resultado nos mostra que toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Teorema 1.1 Toda curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco. De forma mais precisa, fixado $t_0 \in I$, existe uma bijeção $h : J \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^∞ definida em um intervalo J sobre I , com $0 \in J$ e $h(0) = t_0$, de modo que a curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$, satisfaz $\|\beta'(s)\| = 1$.

Prova. Visto que α é regular, a função comprimento de arco, por (1.3), satisfaz

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| > 0.$$

Logo L_α é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Devido à continuidade de L_α , temos ainda que $L_\alpha(I)$ é um intervalo J . Concluímos então que L_α possui inversa diferenciável

$$h : J \rightarrow I.$$

Como $L_\alpha(t_0) = 0$, $0 \in J$ e $h(0) = t_0$, vamos provar que β definida por $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco. Com efeito, visto que $h = L_\alpha^{-1}$,

$$h'(s) = \frac{1}{L'_\alpha(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}.$$

Logo

$$\beta'(s) = [\alpha \circ h(s)]' = \alpha'(h(s)) h'(s).$$

Portanto

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s)) h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| |h'(s)| = 1.$$

□

Vejamos agora alguns exemplos de reparametrizações de curvas pelo comprimento de arco.

Exemplo 1.8 *Considere o círculo de raio R dado pelo traço da curva α definida por $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Logo, se tomamos $t_0 = 0$, $L_\alpha(t) = Rt$. Assim uma reparametrização pelo comprimento de arco de α é dada por*

$$\beta(s) = \left(R \cos \left(\frac{s}{R} \right), R \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right),$$

onde $\beta : [0, 2\pi R] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.9 *Seja α uma curva, dada por*

$$\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t),$$

$t \in \mathbb{R}$. O traço da curva α descreve uma espiral, tal que

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Em particular,

$$L_\alpha^{-1}(s) = -\ln \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

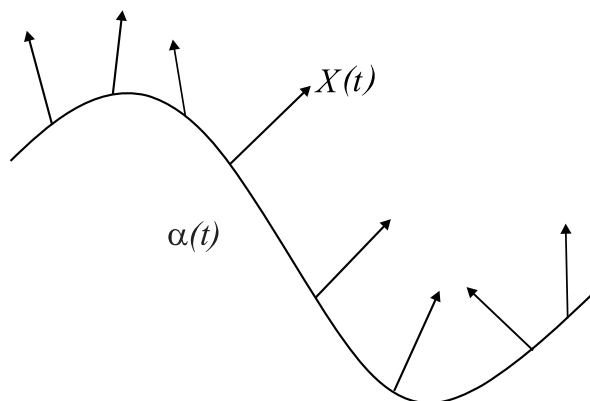
Portanto uma reparametrização pelo comprimento de arco de α é dada por

$$\beta(s) = \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \left(\cos \ln \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \sin \ln \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right),$$

onde $\beta : [0, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

1.5 Campo de Vetores ao Longo de Curvas

Intuitivamente, um campo de vetores $X(t)$ ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor com origem em $\alpha(t)$.



Campo de vetores $X(t)$ ao longo de α .

Logo para determinar $X(t)$, basta conhecer a extremidade final do vetor $X(t)$, uma vez que sua extremidade inicial é $\alpha(t)$.

Definição 1.5 *Um campo de vetores de classe C^r ao longo de α é uma aplicação $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r . Geometricamente, o campo de vetores X é dado, em cada ponto $\alpha(t)$, pelo vetor de extremidades $\alpha(t)$ e $X(t)$.*

Se α é uma curva parametrizada e regular, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, então T , definido por $T(t) = (x'(t), y'(t))$, é um campo de classe C^∞ ao longo de α . T é chamado *campo tangente*. No caso em que α está parametrizada pelo comprimento de arco, T é um campo unitário, isto é, $\|T(t)\| = 1$. O campo N , dado por $N(t) = (-y'(t), x'(t))$, é também um campo de classe C^∞ ao longo de α . Observe que, para todo $t \in I$,

$$\langle T(t), N(t) \rangle = -x'(t)y'(t) + y'(t)x'(t) = 0,$$

isto é, N é perpendicular a T . N é chamado *campo normal*. No caso em que α está parametrizada pelo comprimento de arco, N é um campo unitário.

Dados dois campos X e Y de classe \mathcal{C}^r ao longo de α e uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^r , podemos definir os campos $X+Y$ e fX por

$$(X + Y)(t) = X(t) + Y(t), \quad (fX)(t) = f(t)X(t),$$

que também serão campos de classe \mathcal{C}^r ao longo de α . Se $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ é um campo de classe \mathcal{C}^r , com $r > 0$, definimos a derivada de X por

$$X'(t) = (X'_1(t), X'_2(t)).$$

Nesse caso, o campo X' é um campo de classe \mathcal{C}^{r-1} ao longo de α . As seguintes relações são facilmente verificadas:

$$\begin{aligned} (X + Y)' &= X' + Y', \\ (fX)' &= f'X + fX', \\ \langle X, Y \rangle' &= \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle. \end{aligned}$$

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 1.4 *Se X, Y são campos diferenciáveis e $\langle X, Y \rangle$ é constante, então*

$$\langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle. \quad (1.4)$$

Prova. Derivando a equação $\langle X, Y \rangle = \text{const.}$, obtemos

$$0 = \langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle,$$

o que conclui a prova. □

Corolário 1.1 *$\|X\|$ é constante, então $X'(t)$ é perpendicular a $X(t)$, para todo $t \in I$, isto é,*

$$\langle X, X' \rangle = 0. \quad (1.5)$$

1.6 Curvatura e Fórmulas de Frenet

Vamos considerar nesta seção curvas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco. Observe que por hipótese, $\alpha'(s) \neq 0$. Dessa forma está bem definido um campo T de vetores tangentes e unitários ao longo de α dado por

$$T(s) = \alpha'(s).$$

$T(s)$ é chamado *vetor tangente* à curva α em $\alpha(s)$. Se $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, então $T(s) = (x'(s), y'(s))$. Observe que podemos definir o campo N ao longo de α , tal que, para cada $s \in I$, $\{T, N\}$ seja uma base positiva de \mathbb{R}^2 , isto é, existe uma rotação que leva $(1, 0)$ em T e $(0, 1)$ em N . Assim sendo,

$$N(s) = (-y'(s), x'(s)),$$

e temos que N é um campo normal e unitário ao longo de α e de classe \mathcal{C}^∞ . Para cada $s \in I$, $N(s)$ é chamado vetor normal à curva α em $\alpha(s)$.

Definição 1.6 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial $\{T(s), N(s)\}$ é chamado referencial de Frenet de α .*

Visto que $\|T\| = 1$, temos, pela Proposição 1.1, que $T'(s)$ é perpendicular a $T(s)$. Como T e N geram o espaço \mathbb{R}^2 , temos que, para cada $s \in I$, $T'(s)$ é paralelo a $N(s)$. Isso significa que existe uma função k , tal que

$$T'(s) = k(s)N(s), \quad s \in I. \quad (1.6)$$

Definição 1.7 *A função k , definida pela equação (1.6), é chamada curvatura de α em $s \in I$.*

Observe que a curvatura $k(s)$ é dada por

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle N'(s), T(s) \rangle.$$

Portanto temos que $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathcal{C}^∞ , quando α for de classe \mathcal{C}^∞ .

Geometricamente, visto que $\|T(s)\| = 1$ e $|k(s)| = \|T'(s)\|$, a função curvatura é uma medida da variação da direção de T e, portanto, da mudança de direção da reta tangente a α em $\alpha(s)$.

A curvatura então é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta. De fato, o próximo resultado caracteriza as retas como as curvas cuja curvatura é identicamente nula.

Proposição 1.5 *A curvatura de uma curva regular α é identicamente zero, se e somente se o traço de α está contido em uma reta.*

Prova. Suponha que $k(s) \equiv 0$. Como $0 = |k(s)| = \|T'(s)\|$, temos que $T'(s) = (0, 0)$. Como T está definida em um intervalo I , concluímos que $T(s)$ é um vetor constante V_0 . Isso implica que

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s T(\xi) d\xi = \alpha(s_0) + V_0(s - s_0).$$

Portanto o traço de α está contido na reta que passa por $\alpha(s_0)$ e é paralela ao vetor V_0 . Reciprocamente, se o traço de α está contido em uma reta e α está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$\alpha(s) = P_0 + sV_0, \quad \|V_0\| = 1.$$

Logo $T(s) = V_0$ e, portanto, $T'(s) = (0, 0)$. Assim concluímos que $k(s) = 0$. □

Agora vamos estudar a variação do campo N . Como $\|N(s)\| = 1$, obtemos que $N'(s)$ é perpendicular a $N(s)$ e, portanto, paralelo a $T(s)$. Observe que a equação (1.6) implica que

$$\begin{aligned}x'' &= -k(s)y'(s), \\y'' &= k(s)x'(s).\end{aligned}$$

Assim

$$N'(s) = (-y''(s), x''(s)) = -k(s)(x'(s), y'(s)) = -k(s)T(s). \quad (1.7)$$

Os campos T e N satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} T'(s) &= k(s)N(s), \\ N'(s) &= -k(s)T(s). \end{cases} \quad (1.8)$$

As equações desse sistema são denominadas *Equações de Frenet* da curva α . Vamos definir a curvatura de uma curva regular não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco. Como vimos anteriormente, toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco.

Definição 1.8 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada e regular, e seja $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização pelo comprimento de arco de α . Definimos a curvatura de α em $t \in I$ como a curvatura de β no ponto $s \in J$ que corresponde ao ponto $t \in I$.*

O próximo resultado expressará a curvatura de uma curva regular e não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco.

Proposição 1.6 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então a curvatura de α em $t \in I$ é dada pela expressão*

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}. \quad (1.9)$$

Prova. Consideremos $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização positiva de α pelo comprimento de arco. Então, se escrevemos $\beta(s(t)) = \alpha(t) = (x(t), y(t))$,

$$(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) = \frac{d\beta}{ds} s'(t)$$

e

$$(x''(t), y''(t)) = \alpha''(t) = \frac{d^2\beta}{ds^2} (s'(t))^2 + \frac{d\beta}{ds} s''(t).$$

Usando a primeira equação acima e o fato de que $s'(t) > 0$, temos que $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ e, portanto,

$$s''(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Logo obtemos que

$$T(s(t)) = \frac{d\beta}{ds}(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}(x'(t), y'(t))$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds}(s(t)) &= \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(t)) = \frac{1}{(s'(t))^2} [\alpha''(t) - s''(t)T(s(t))] \\ &= \frac{1}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} [(x''(t), y''(t)) - s''(t)T(s(t))]. \end{aligned}$$

Por definição do campo normal,

$$N(s(t)) = \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}(-y'(t), x'(t)).$$

A equação (1.6) nos diz que

$$k(s(t)) = \left\langle \frac{dT}{ds}(s(t)), N(s(t)) \right\rangle.$$

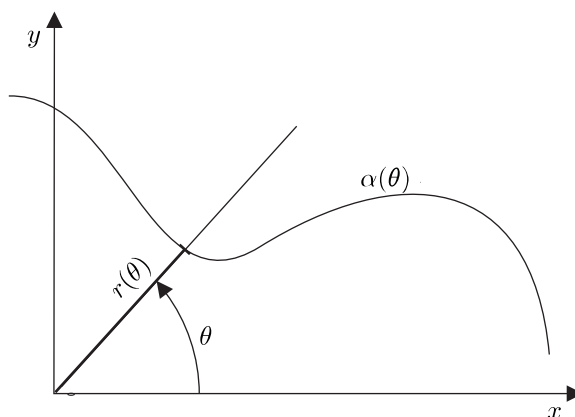
Substituindo as expressões de $\frac{dT}{ds}$ e N na equação acima e usando o fato de que T e N são ortogonais, obtemos o resultado desejado. \square

Em muitas situações, uma curva pode ter uma expressão mais simples, se ao invés de descrevê-la em relação ao sistema de coordenadas cartesianas, usarmos coordenadas polares. O próximo resultado nos dará a expressão para a curvatura em coordenadas polares.

Proposição 1.7 *Seja $r = r(\theta)$ uma curva regular, definida por uma equação polar. Então sua curvatura $k(\theta)$ é dada por*

$$k(\theta) = \frac{(r(\theta))^2 + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)}{((r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.10)$$

Prova. Seja $\alpha(\theta) = r(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ a equação paramétrica da curva dada por $r = r(\theta)$.



Logo

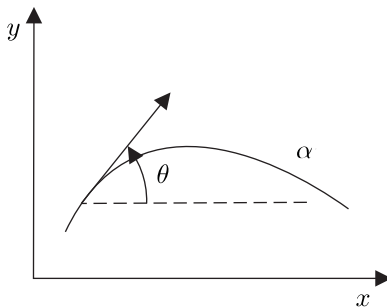
$$\alpha'(\theta) = (x', y') = r'(\cos\theta, \sin\theta) + r(-\sin\theta, \cos\theta)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\alpha''(\theta) &= (x'', y'') = r''(\cos \theta, \sin \theta) + r'(-\sin \theta, \cos \theta) + \\ & r'(-\sin \theta, \cos \theta) + r(-\cos \theta, -\sin \theta) = \\ &= (r'' - r)(\cos \theta, \sin \theta) + 2r'(-\sin \theta, \cos \theta).\end{aligned}$$

Portanto, substituindo os valores de x', y', x'', y'' em (1.9), obtemos a expressão desejada. \square

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Podemos definir $\theta(t)$ como sendo o ângulo que o vetor tangente à α faz com o eixo x .



Portanto, nos intervalos em que x' não se anule,

$$\theta(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Caso x' se anule, podemos considerar

$$\theta(t) = \arctan \frac{x'(t)}{y'(t)}.$$

Assim temos um resultado simples e útil, envolvendo a derivada de θ e a curvatura de α .

Proposição 1.8 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe \mathcal{C}^2 , parametrizada pelo comprimento de arco e definida por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Seja $\theta(s)$ o ângulo que o vetor $\alpha'(s)$ faz com o eixo x . Então*

$$\theta'(s) = k(s), \quad (1.11)$$

onde k é a função curvatura da curva α .

Prova. Suponha que $\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)}$, isto é, em pontos com $x'(s) \neq 0$. É claro que

$$\begin{aligned} \theta'(s) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)^2} \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2} \\ &= \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} \\ &= x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s). \end{aligned}$$

Agora, usando a equação (1.9), obtemos o resultado desejado. \square

Interpretação Geométrica

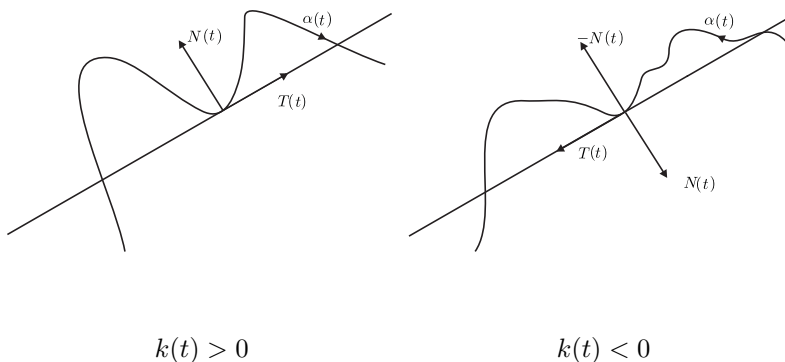
Vamos considerar uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com curvatura $k(s)$, para cada $s \in I$.

1. Do sinal de k :

Se $k(t_0) > 0$, então, para todo t suficientemente próximo de t_0 , $\alpha(t)$ está no semi-plano determinado pela reta tangente à curva α em $\alpha(t_0)$ para o qual aponta $N(t_0)$. De fato, basta verificar que a função

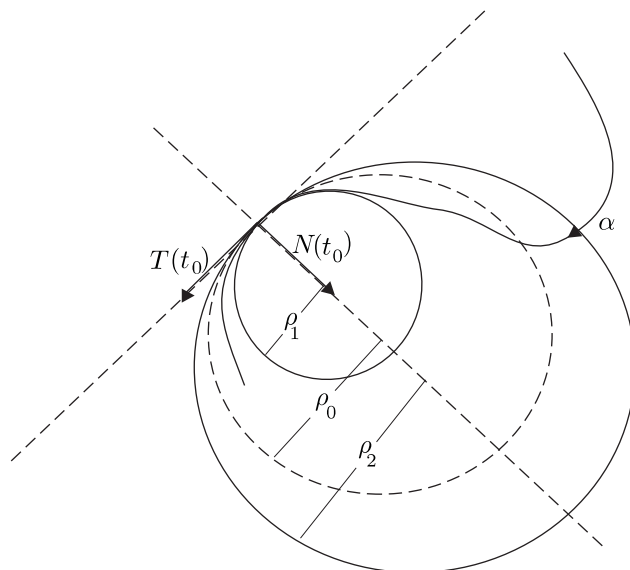
$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle$$

é maior ou igual a zero, para t próximo de t_0 . Observe que $f'(t_0) = 0$ e, por (1.8), $f''(t_0) = k(t_0) > 0$. Logo f possui um mínimo relativo estrito em t_0 . Como $f(t_0) = 0$, concluímos a prova. Observe que, de modo análogo, se $k(t_0) < 0$, f possui um máximo relativo estrito em t_0 e, portanto, $\alpha(t)$ pertence ao semi-plano determinado pela reta tangente à curva α em t_0 para o qual aponta o vetor $-N(t_0)$.



2. Do valor de k :

Suponha que $k(t_0) > 0$. Para cada $\rho > 0$, sejam $P_\rho = \alpha(t_0) + \rho N(t_0)$ e \mathcal{C}_ρ o círculo de centro em P_ρ e raio ρ . Então, para t suficientemente pequeno, $\alpha(t)$ está contido no interior de \mathcal{C}_ρ , se $\rho > \frac{1}{k(t_0)}$ e está contido no exterior de \mathcal{C}_ρ , se $\rho < \frac{1}{k(t_0)}$.



$$\rho_0 = \frac{1}{k(t_0)}, \quad 0 < \rho_1 < \rho_0 < \rho_2$$

De fato, vamos considerar a função g definida por

$$g(t) = \|\alpha(t) - P_\rho\|^2 - \rho^2$$

próximo de t_0 . Agora usando a definição de g e as Equações de Frenet, temos que $g(t_0) = g'(t_0) = 0$ e $g''(t_0) = -k(t_0)\rho + 1$. Logo, se $\rho < \frac{1}{k(t_0)}$, então g possui um mínimo estrito em t_0 e, se $\rho > \frac{1}{k(t_0)}$, g possui um máximo estrito em t_0 , o que conclui a prova da afirmação. Em geral, nada se pode afirmar quando $\rho = \frac{1}{k(t_0)}$.

Quando $k(t_0) > 0$, definimos o *raio de curvatura* de α em t_0 por $\rho_0 = \frac{1}{k(t_0)}$. O ponto $P_{\rho_0} = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}N(t_0)$ é chamado de *centro de curvatura* ou *ponto focal* de α em t_0 e o círculo

\mathcal{C}_{ρ_0} é chamado *círculo osculador* de α em t_0 . Observe que \mathcal{C}_{ρ_0} é tangente à curva α em $\alpha(t_0)$ e tem a mesma curvatura que α nesse ponto.

1.7 Teorema Fundamental das Curvas Planas

Nosso objetivo é mostrar que, de certa forma, a função curvatura determina a curva. Esse fato é demonstrado pelo seguinte resultado:

Teorema 1.2 *Seja $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . Então, dados $s_0 \in I$, $P = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$ e $V_0 = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$, com $\|V_0\| = 1$, existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que a curvatura em cada ponto $\alpha(s)$ é dada por $k(s)$, $\alpha(s_0) = P$ e $\alpha'(s_0) = V_0$.*

Prova. Suponha que α , definida por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, seja uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e possua curvatura k . As Equações de Frenet, veja (1.8), implicam que as funções x e y satisfazem

$$\begin{cases} x''(s) = -k(s)y'(s), \\ y''(s) = k(s)x'(s), \end{cases}$$

com condições iniciais dadas por $x(t_0) = P_1$, $y(t_0) = P_2$, $x'(t_0) = V_1$ e $y'(t_0) = V_2$. O sistema acima tem uma integral primeira, dada por

$$\begin{cases} x'(s) = \cos \left(\int_{s_0}^s k(\xi) d\xi + a \right), \\ y'(s) = \sin \left(\int_{s_0}^s k(\xi) d\xi + a \right), \end{cases} \quad (1.12)$$

onde a é determinado pelas relações $\cos a = V_1$ e $\sin a = V_2$. Integrando as equações do sistema acima, obtemos

$$\begin{cases} x(s) = P_1 + \int_{s_0}^s \cos \left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + a \right) d\tau, \\ y(s) = P_2 + \int_{s_0}^s \sin \left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + a \right) d\tau. \end{cases}$$

É fácil verificar que a curva dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ satisfaz às condições do teorema.

Vamos provar agora a unicidade de tal curva. Suponhamos que existam duas curvas, definidas por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ e $\beta(s) = (u(s), v(s))$ nas condições do teorema. As Equações de Frenet para α e β implicam que as funções $f(s) = x'(s) - u'(s)$ e $g(s) = y'(s) - v'(s)$ satisfazem o sistema

$$\begin{cases} f'(s) = -k(s)g(s), \\ g'(s) = k(s)f(s). \end{cases}$$

Isto implica então que

$$\frac{1}{2}(f^2 + g^2)'(s) = f(s)f'(s) + g(s)g'(s) = 0.$$

Logo $(f^2 + g^2)$ é uma função constante e como é nula em $s = s_0$, temos que $(f^2 + g^2)(s) \equiv 0$ e, portanto, $f(s) = g(s) = 0$. Assim concluímos que

$$\alpha'(s) = \beta'(s), \quad \forall s \in I.$$

Agora, usando o fato de que $\alpha(s_0) = \beta(s_0) = P_0$, obtemos que $\alpha(s) \equiv \beta(s)$, o que conclui a prova do teorema. \square

Esse resultado tem, como conseqüência, que a curvatura determina uma curva, a menos de sua posição no plano.

Corolário 1.2 *Duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco com a mesma função de curvatura $k : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ são congruentes, isto é, existem uma rotação $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e uma translação por um vetor $b \in \mathbb{R}^2$, tal que, para todo $s \in I$,*

$$\beta(s) = (A \circ \alpha)(s) + b.$$

Prova. Fixe $s_0 \in I$. Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a rotação que leva $\alpha'(s_0)$ em $\beta'(s_0)$, e seja $b = \beta(s_0) - A(\alpha(s_0))$. Temos que a curva γ , dada por $\gamma(s) = A \circ \alpha(s) + b$, é tal que $\gamma(s_0) = \beta(s_0)$, $\gamma'(s_0) = \beta'(s_0)$ e a curvatura em cada ponto $\gamma(s)$ é $k(s)$. Pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas, $\gamma(s) \equiv \beta(s)$, o que conclui a prova. □

1.8 Forma Canônica Local

Iremos ver novamente que a curvatura é uma medida de quanto a curva difere da reta tangente para pontos próximos do ponto estudado, agora através da expansão de Taylor. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Considerando a aproximação pelo polinômio de Taylor de cada coordenada de α , temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s) = x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}x''(s_0) \\ \quad + \frac{(s - s_0)^3}{3!}x'''(s_0) + r_1(s), \\ y(s) = y(s_0) + (s - s_0)y'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}y''(s_0) \\ \quad + \frac{(s - s_0)^3}{3!}y'''(s_0) + r_2(s), \end{array} \right. \quad (1.13)$$

$$\text{onde } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_1(s)}{|s - s_0|^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_2(s)}{|s - s_0|^3} = 0.$$

Pelas Equações de Frenet, obtemos que

$$\begin{aligned} (x'''(s_0), y'''(s_0)) &= \alpha'''(s_0) = (k(s)N(s))'|_{s=s_0} \\ &= k'(s_0)N(s_0) + k(s_0)N'(s_0) = k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(s_0) + (s - s_0)T(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}k(s_0)N(s_0) \\ &+ \frac{(s - s_0)^3}{3!}[k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)] + R(s), \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|R(s)\|}{(s - s_0)^3} = 0$. A equação (1.14) mostra que $k(s_0)$ determina o quanto $\alpha(s)$ difere da reta tangente à curva α em s_0 , para pontos próximos de $\alpha(s_0)$. De fato, $\alpha(s)$ difere da reta tangente pelo fator

$$\frac{(s - s_0)^2}{2!}k(s_0)N(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}[k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)] + R,$$

para pontos próximos de s_0 .

Podemos escolher um sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de modo que $\alpha(s_0) = (0, 0)$ e a base canônica seja $\{T(s_0), N(s_0)\}$, isto é, $T(s_0) = (1, 0)$ e $N(s_0) = (0, 1)$. Se em relação a este referencial, a curva α é dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, a equação (1.14) nos diz que

$$\begin{cases} x(s) = (s - s_0) - k^2(s_0)\frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_1(s) \\ y(s) = k(s_0)\frac{(s - s_0)^2}{2!} + k'(s_0)\frac{(s - s_0)^3}{3!} + R_2(s). \end{cases} \quad (1.15)$$

A representação (1.15) é chamada *forma canônica local* de α e descreve o comportamento de qualquer curva regular na vizinhança de um ponto $\alpha(s_0)$. Em particular, ela nos diz que, se $k(s_0) \neq 0$, o traço de α fica de um lado da reta tangente à α em s_0 .

1.9 Evolutas e Involutas

Vamos considerar curvas regulares $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco, tais que sua curvatura k não se anule em I . Nesse caso, para cada $t \in I$, está bem definido o centro de curvatura de α em t , dado por

$$\alpha_e(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}N(t),$$

onde N é o campo normal e unitário de α . A aplicação que a cada $t \in I$ associa $\alpha_e(t)$ define uma curva diferenciável em \mathbb{R}^2 , e é chamada *evoluta* da curva α . Vamos estudar a regularidade de α_e . Usando as equações de Frenet, obtemos

$$\alpha'_e(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k(t)}N'(t) - \frac{k'(t)}{k^2(t)}N(t) = -\frac{k'(t)}{k^2(t)}N(t). \quad (1.16)$$

Temos, portanto, que α_e é regular, se e somente se

$$k'(t) \neq 0.$$

Os pontos singulares da evoluta de uma curva α são aqueles para os quais a curvatura de α possui um ponto crítico. Antes de vermos alguns exemplos de evolutas, observamos que, se $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, com $k(t) \neq 0$, a expressão da evoluta β_e de β é dada por

$$\beta_e(t) = \beta(t) + \frac{1}{k(t)}N(t) = \beta(t) + \frac{\|\beta'(t)\|^2}{\langle \beta''(t), N(t) \rangle}N(t). \quad (1.17)$$

Notemos que β não está necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco.

Exemplo 1.10 *Se o traço de uma curva α descreve um círculo de raio R e centro P_0 , sua evoluta é a curva constante dada por $\alpha_e(t) = P_0$. De fato, parametrizando a curva α por*

$$\alpha(s) = P_0 + \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right), \quad s \in [0, 2\pi R],$$

temos que $k(s) = 1/R$ e, portanto,

$$\alpha_e(s) = \alpha(s) + R \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right) = P_0.$$

Exemplo 1.11 *Considere a elipse dada pelo traço da curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por*

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

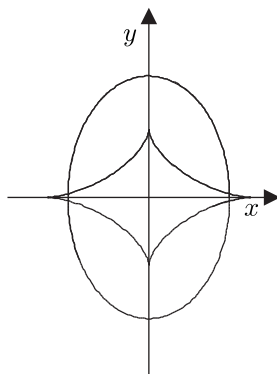
A curvatura de α é dada por

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \neq 0.$$

A evoluta de α , pela equação (1.17), é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_e(t) &= (a \cos t, b \sin t) + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} (-b \cos t, -a \sin t) \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right). \end{aligned}$$

O traço da evoluta da elipse é descrito pelo astróide $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$, que não é regular nos pontos $\alpha_e(t)$, com $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ e $\frac{3\pi}{2}$.



Elipse e sua evoluta.

Exemplo 1.12 Considere a ciclóide dada pelo traço da curva α , definida por $\alpha(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{cos} t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Sua curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{\operatorname{cos} t - 1}{(2 - 2 \operatorname{cos} t)^{3/2}} \neq 0.$$

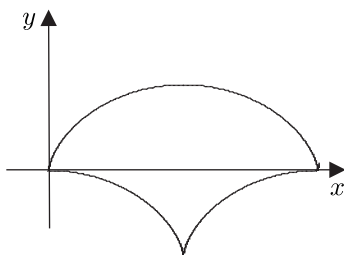
A evoluta de α é a curva definida por

$$\begin{aligned} \alpha_e(t) &= (t - \operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{cos} t) + \frac{2 - 2 \operatorname{cos} t}{\operatorname{cos} t - 1} (-\operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{cos} t) \\ &= (t + \operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t - 1). \end{aligned}$$

Observe que

$$\alpha(t + \pi) = \alpha_e(t) + (\pi, 2).$$

Logo, a menos de uma translação, a evoluta de α é a própria ciclóide.



Evoluta da cicloide

Note que α_e deixa de ser regular em $t = \pi$.

A equação (1.16) mostra que o vetor $N(t)$ é paralelo ao vetor $\alpha'_e(t)$ e, portanto, a reta normal à curva α em $\alpha(t)$ coincide com a reta tangente à α_e em $\alpha_e(t)$. Um outro modo de interpretar esse fato é dizer que a evoluta de uma curva tem a propriedade de, em cada instante, ser tangente às retas normais da curva. Nesse caso, dizemos que a evoluta de uma curva é a envoltória da família de retas normais dessa curva.

Em geral, a evoluta de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco não está parametrizada pelo comprimento de arco. Considere $J \subset I$ um intervalo no qual α_e seja regular. O comprimento de arco de α_e , a partir de $t_0 \in J$, é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'_e(\varepsilon)\| d\varepsilon = \int_{t_0}^t \left| \left(\frac{1}{k(\varepsilon)} \right)' \right| d\varepsilon = \left| \frac{1}{k(t)} - \frac{1}{k(t_0)} \right|,$$

onde usamos que k e k' não trocam de sinal em J . Da definição da evoluta α_e de uma curva α , temos que

$$\alpha(t) = \alpha_e(t) - \frac{1}{k(t)}N(t).$$

A equação (1.16) nos diz que o campo tangente unitário de α_e é igual a $-N$, se $k'(t) > 0$. Podemos, portanto, recuperar a curva α , a partir de α_e , pela equação

$$\alpha(t) = \alpha_e(t) + \frac{1}{k(t)} \frac{\alpha'_e(t)}{\|\alpha'_e(t)\|}.$$

Vamos introduzir agora uma noção dual à de evoluta de uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Seja $t_0 \in I$ fixado, e seja $\mathcal{L} : I \rightarrow \mathbb{R}$ o comprimento de arco de α a partir de t_0 ,

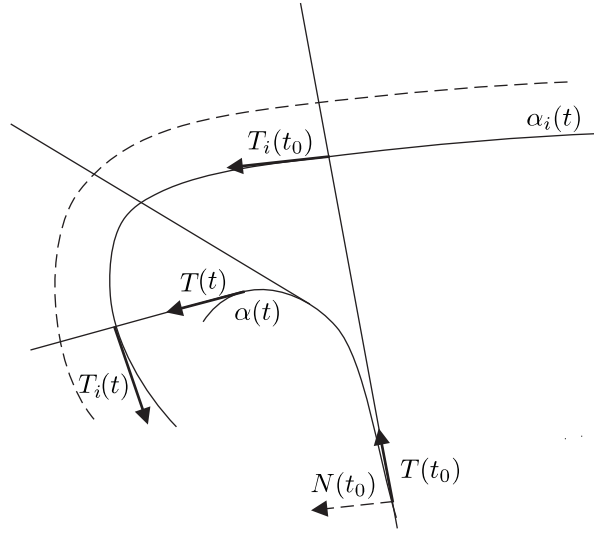
$$\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon.$$

Definição 1.9 Uma involuta da curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a curva $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha_i(t) = \alpha(t) + (C - \mathcal{L}(t))T(t),$$

sendo T o campo tangente de α , e C é uma constante real positiva.

Observe que, para valores diferentes de C , obtemos involutas diferentes de α , porém todas são equidistantes, conforme mostra a figura a seguir.



Agora estudaremos a regularidade da involuta de uma curva regular. Calculando o vetor $\alpha'_i(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'_i(t) &= \alpha'(t) - \mathcal{L}'(t)T(t) + (C - \mathcal{L}(t))T'(t) \\ &= \alpha'(t) - \|\alpha'(t)\|T(t) + (C - \mathcal{L}(t))k(t)\|\alpha'(t)\|N(t) \quad (1.18) \\ &= (C - \mathcal{L}(t))k(t)\|\alpha'(t)\|N(t), \end{aligned}$$

onde k é a curvatura de α . Portanto, se $C \neq \mathcal{L}(t)$ e $k(t) \neq 0$, então α_i é regular em t . Vamos supor que $C > \mathcal{L}(t)$, $\forall t \in I$ e nos restringir aos subintervalos J de I nos quais $k(t) \neq 0$. Se $k(t) > 0$ em J , temos que os campos tangente T_i e normal N_i da involuta α_i se relacionam com os campos correspondentes da curva α por

$$T_i(t) = N(t) \quad N_i(t) = -T(t),$$

enquanto nos intervalos onde $k(s) < 0$, temos

$$T_i(t) = -N(t) \quad N_i(t) = T(t).$$

Dessas equações, temos que as retas normais da involuta α_i são as retas tangentes à α , e as retas tangentes de α_i são paralelas às retas normais de α nos pontos correspondentes.

O cálculo da curvatura k_i de α_i nos dá que

$$k_i(t) = \frac{\langle T'_i(t), N_i(t) \rangle}{\|\alpha'_i(t)\|} = -\frac{\langle T'(t), N(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} = -\frac{k(t)\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'_i(t)\|}$$

Pela equação (1.18), se $k(t) > 0$,

$$k_i(t) = \frac{1}{C - \mathcal{L}(t)},$$

e, se $k(t) < 0$,

$$k_i(t) = -\frac{1}{C - \mathcal{L}(t)}.$$

O próximo resultado nos dará a evoluta de α_i .

Proposição 1.9 *A curva α é a evoluta de qualquer uma de suas involutas, isto é,*

$$(\alpha_i)_e(t) = \alpha(t).$$

Prova. Temos, por definição da evoluta de α_i , que

$$\begin{aligned} (\alpha_i)_e(t) &= \alpha_i(t) + \frac{1}{k_i(t)}N_i(t) \\ &= \alpha(t) + (C - \mathcal{L}(t))T(t) - (C - \mathcal{L}(t))T(t) \\ &= \alpha(t). \end{aligned}$$

□

1.10 Número de Rotação de uma Curva Fechada

Nesta seção vamos definir o número de rotação de uma curva fechada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Intuitivamente, o número de rotação mede o número algébrico de voltas que o vetor posição V , relativo ao ponto P_0 , dado por $V(t) = \alpha(t) - P_0$, dá em torno de P_0 , quando t varia de $t = a$ a $t = b$. Para tornar esta noção precisa, vamos estudar a função angular. O primeiro resultado que temos é o seguinte:

Teorema 1.3 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua, e seja P_0 um ponto não pertencente ao traço de α . Então existe uma função contínua $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$\varphi(t) \equiv \mathfrak{A}(\alpha(a) - P_0, \alpha(t) - P_0) \pmod{2\pi},$$

para todo $t \in [a, b]$. Além disso, se ψ é uma outra função como acima, então φ e ψ diferem por um múltiplo de 2π , isto é,

$$\varphi(t) = \psi(t) + 2k\pi,$$

para todo $t \in [a, b]$ e para algum $k \in \mathbb{Z}$ fixado. Em particular, existe uma única função φ como acima, tal que $\varphi(a) = 0$.

Prova. A prova deste resultado pode ser encontrada em [AS].

Definição 1.10 *A função φ , dada pelo Teorema 1.3, tal que $\varphi(a) = 0$, depende do ponto P_0 . Vamos denominá-la função angular de α com respeito a P_0 .*

Observe que, se $t, s \in [a, b]$, então a função angular φ satisfaz

$$\varphi(s) - \varphi(t) \equiv \mathfrak{A}(\alpha(t) - P_0, \alpha(s) - P_0) \pmod{2\pi}.$$

Além disso, se t e s são suficientemente próximos (por exemplo, $|t - s| < \delta$, com δ escolhido como na observação (??)), temos

$$\varphi(s) - \varphi(t) = \mathfrak{A}(\alpha(s) - P_0, \alpha(t) - P_0).$$

A última observação decorre do fato de que, fixado s , a função g , definida por $g(t) = \frac{1}{2\pi}[\varphi(t) - \varphi(s) - \mathfrak{A}(\alpha(t) - P_0, \alpha(s) - P_0)]$, é contínua se $|t - s| < \delta$, $g(t) \in \mathbb{Z}$ e $g(s) = 0$.

Seja $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização positiva de $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, isto é, existe uma bijeção crescente e contínua $\sigma : [c, d] \rightarrow [a, b]$, tal que $\beta(t) = \alpha \circ \sigma(t)$. Observe que $\sigma(c) = a$. Então, se φ é uma função angular para α em relação a P_0 , a função $\tilde{\varphi} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\sigma(t)) - \varphi(a), \quad (1.19)$$

é uma função angular para β , com $\tilde{\varphi}(c) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma(s)) &= \mathfrak{A}(\alpha(a) - P_0, \alpha(\sigma(s)) - P_0) \\ &= \mathfrak{A}(\alpha(a) - P_0, \alpha(\sigma(c)) - P_0) + \\ &\quad + \mathfrak{A}(\alpha(\sigma(c)) - P_0, \alpha(\sigma(s)) - P_0) \end{aligned}$$

$$= \varphi(\sigma(c)) + \mathfrak{A}(\beta(c) - P_0, \beta(s) - P_0).$$

Se α é uma curva diferenciável, o próximo resultado nos dá uma expressão para uma função angular.

Proposição 1.10 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável, e seja P_0 um ponto fora do traço de α . Então a função $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(t) = \int_a^t \frac{\langle (\alpha(\xi) - P_0)^\perp, \alpha'(\xi) \rangle}{\|\alpha(\xi) - P_0\|^2} d\xi, \quad (1.20)$$

é uma função angular da curva α , com relação a P_0 .

Estamos prontos para definir o *número de rotação* de uma curva fechada no plano em relação a um ponto P_0 , não pertencente ao seu traço.

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(a) = \alpha(b)$, uma curva fechada e contínua e seja P_0 um ponto fora do traço de α . Seja φ a função angular de α com relação a P_0 , com $\varphi(a) = 0$. Como $\alpha(a) = \alpha(b)$, temos que

$$\varphi(b) \equiv \mathfrak{A}(\alpha(a) - P_0, \alpha(b) - P_0) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Definição 1.11 *O número*

$$W(\alpha, P_0) = \frac{1}{2\pi} \varphi(b) \in \mathbb{Z}$$

é chamado de número de rotação de α em relação a P_0 .

O número de rotação $W(\alpha, P_0)$ mede o número algébrico de voltas que o vetor posição V , relativo ao ponto P_0 , dado por

$V(t) = \alpha(t) - P_0$, dá em torno de P_0 , quando t varia de $t = a$ a $t = b$. Se α é uma curva de classe \mathcal{C}^1 , então, por (1.20),

$$W(\alpha, P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle (\alpha(\xi) - P_0)^\perp, \alpha'(\xi) \rangle}{\|\alpha(\xi) - P_0\|^2} d\xi. \quad (1.21)$$

Essa expressão tem uma conseqüência surpreendente: o membro direito da equação acima é sempre um número inteiro.

Neste capítulo vamos estudar o comportamento do campo tangente a uma curva regular e fechada. Para isso, vamos esclarecer o tipo de curvas em que esse estudo faz sentido. Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva fechada, se $\alpha(a) = \alpha(b)$. Uma curva fechada α é diferenciável, se existe um $\varepsilon > 0$ e uma curva diferenciável $\tilde{\alpha} : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$ para todo $t \in [a, b]$ e $\tilde{\alpha}'(a)$ e $\tilde{\alpha}'(b)$ são vetores não-nulos com mesma direção e sentido. Uma curva fechada e diferenciável $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe \mathcal{C}^n , se $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\frac{d^k \alpha}{dt^k}(a) = \frac{d^k \alpha}{dt^k}(b)$ para todo $k = 1, \dots, n$ e $\frac{d^n \alpha}{dt^n}(t)$ é um campo contínuo ao longo de α . Desse modo, podemos falar em curvas fechadas e regulares, isto é, uma curva fechada e diferenciável tal que seu vetor tangente é não-nulo para todo $t \in [a, b]$. Uma curva fechada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita simples, se, restrita ao intervalo $(a, b]$, ela for uma aplicação injetiva.

Se α é uma curva fechada e regular de classe \mathcal{C}^1 , podemos considerar a curva $\alpha' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Essa curva é fechada, contínua e, por α ser regular, $(0, 0)$ não está no traço de α' . Então temos que o número de rotação de α' em relação ao ponto $(0, 0)$ está bem definido.

Definição 1.12 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada e regular e de classe \mathcal{C}^2 . O índice de rotação de α , R_α , é definido*

por

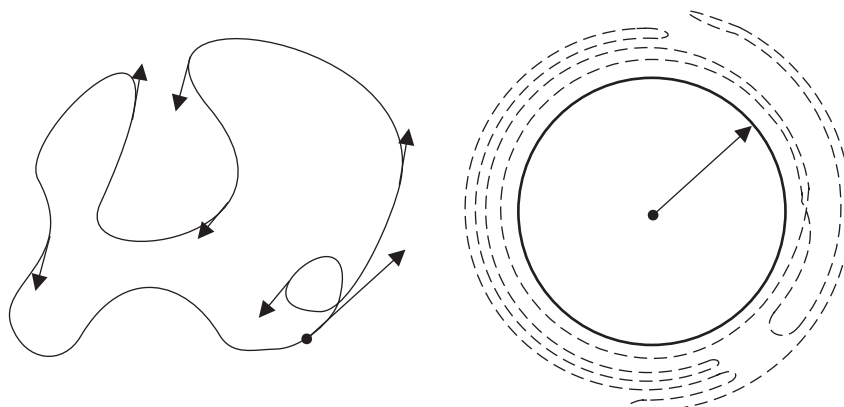
$$R_\alpha = W(\alpha', (0, 0)).$$

Observe que, a priori, R_α não tem nenhuma relação com os números de rotação de α em relação a pontos fora de seu traço. O índice de rotação mede o número de voltas (orientadas) que o vetor tangente de α dá em torno da origem, quando percorremos o traço de α .

Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, podemos definir a indicatriz tangente $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, dada por $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ e a indicatriz normal $N : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, dada por $N(t) = T^\perp(t)$. É claro que se α é uma curva fechada e de classe \mathcal{C}^1 , T e N são curvas fechadas e contínuas em $[a, b]$ e assumem valores no círculo unitário \mathbb{S}^1 . Como consequência da definição dessas curvas, temos que α' , T e N possuem a mesma função angular $\varphi(t)$ em relação a origem, com $\varphi(a) = 0$. Portanto

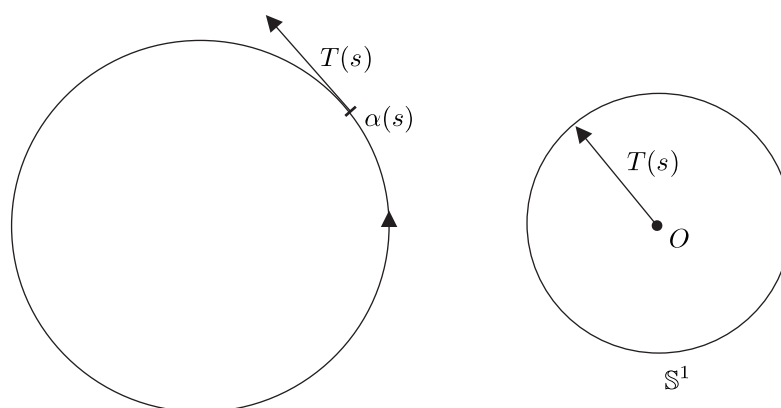
$$R_\alpha = W(\alpha', (0, 0)) = W(T, (0, 0)) = W(N, (0, 0)) = \frac{1}{2\pi}\varphi(b).$$

A idéia de associar uma curva regular α ao movimento circular do vetor tangente unitário T ou, equivalentemente, do vetor unitário normal N é devida a C.F. Gauss, no início da Geometria Diferencial, e essa idéia tem um papel fundamental na teoria das curvas planas diferenciáveis. Observe que T e N diferem apenas por uma rotação constante de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ ao redor da origem. T e/ou N são freqüentemente chamadas de *imagem tangente (de Gauss)* e/ou *imagem normal (de Gauss)* de α no círculo \mathbb{S}^1 .



Exemplo 1.13 Seja $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva, dada por $\alpha(t) = (R \cos nt, R \sin nt)$, com $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. A curva α parametriza o círculo de raio R que dá $|n|$ voltas em torno da origem, no sentido anti-horário, se $n > 0$ e, no sentido horário, se $n < 0$. Um cálculo simples mostra que

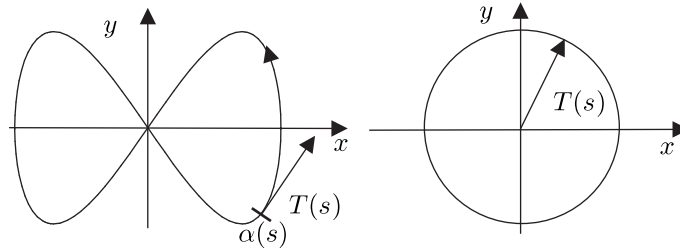
$$R_\alpha = n.$$



A curva α descreve o círculo que dá n voltas em torno do seu centro e seu índice de rotação é igual a n .

Exemplo 1.14 Considere a lemniscata, dada pelo traço da curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (\cos t, \cos 2t)$. A curva α é uma curva regular, fechada e

$$R_\alpha = 0.$$



A lemniscata possui índice de rotação igual a zero.

Os dois exemplos acima nos mostram que qualquer $n \in \mathbb{Z}$ pode ser índice de rotação de uma curva regular e fechada.

O índice de rotação de uma curva fechada e regular α é invariante por reparametrizações próprias de α e também se consideramos outro ponto inicial/final para α . Porém, se consideramos α^- a curva obtida percorrendo α na orientação oposta, temos que $R_{\alpha^-} = -R_\alpha$.

Para entendermos o comportamento de R_α , quando *deformamos* α , vamos introduzir o conceito de *homotopia regular*:

Definição 1.13 Duas curvas fechadas e regulares $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ são ditas *regularmente homotópicas*, se existe uma aplicação $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

1. $H(\zeta, t)$ é contínua em $[0, 1] \times [a, b]$; H é de classe \mathcal{C}^1 em relação a variável t , isto é, $\frac{\partial H}{\partial t}$ é uma função contínua;
2. Para cada $\zeta \in [0, 1]$, a curva $\alpha_\zeta(t) = H(\zeta, t)$, $t \in [a, b]$ é uma curva fechada regular;

3. $H(0, t) = \alpha(t)$ e $H(1, t) = \beta(t)$.

A aplicação H é dita uma homotopia regular entre α e β .

Para curvas regularmente homotópicas, temos o seguinte resultado:

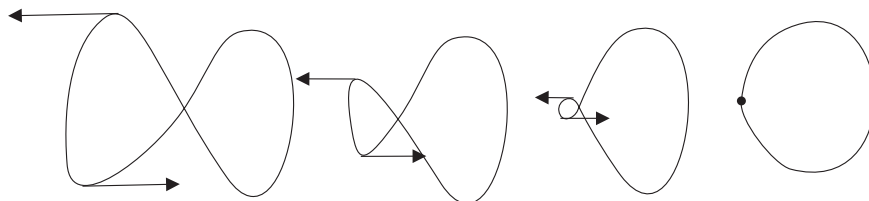
Proposição 1.11 *Sejam $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas fechadas e regulares. Se α é regularmente homotópica a β , então*

$$R_\alpha = R_\beta.$$

Prova. Basta observar que, se $H(\zeta, t)$ é uma homotopia regular entre α e β , então $\frac{\partial H}{\partial t}(\zeta, t)$ é uma homotopia entre α' e β' e, portanto,

$$R_\alpha = W(\alpha', (0, 0)) = W(\beta', (0, 0)) = R_\beta. \quad \square$$

Tendo em vista o resultado acima, temos que não é possível construir uma homotopia regular entre a lemniscata, dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e o círculo unitário $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Note que, como \mathbb{R}^2 é convexo, essas curvas são homotópicas (como curvas contínuas) em \mathbb{R}^2 . Vale observar que estamos pedindo regularidade em cada estágio da deformação que leva α em β .



Não é possível eliminar o laço a esquerda da curva acima, usando a seqüência de deformações, uma vez que o vetor tangente ao

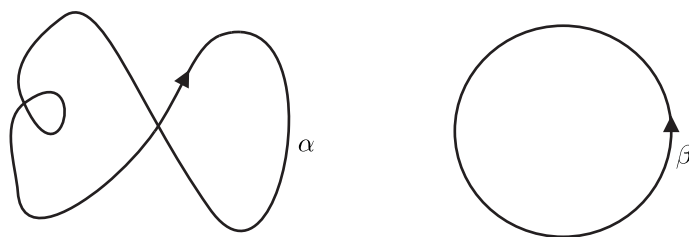
longo desse laço muda muito de direção, independente do tamanho do laço. A continuidade de α'_ζ implica que esse vetor deve anular-se no limite final.

Por outro lado, temos o seguinte teorema devido a Whitney e Graustein (veja [MR], Teorema 9.9 p.397) que nos dá a recíproca do proposição anterior.

Teorema 1.4 *Duas curvas fechadas e regulares $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ são regularmente homotópicas, se e somente se*

$$R_\alpha = R_\beta.$$

Exemplo 1.15 *Seja $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um círculo que dá uma volta no sentido anti-horário em torno de seu centro, e seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva que percorre uma vez a lemniscata com um laço, ver figura abaixo, na orientação indicada.*



Temos que

$$R_\alpha = R_\beta = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Whitney-Graustein, α e β são regularmente homotópicas. Você consegue imaginar uma homotopia regular que leve α em β ?

1.11 Curvatura Total

Vamos supor agora que $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva fechada, regular e de classe \mathcal{C}^2 . Nesse caso, os campos vetoriais α' , T e

N são campos de classe \mathcal{C}^1 ao longo de α . Pelas Equações de Frenet, o vetor tangente da curva T satisfaz

$$T'(t) = k(t)\|\alpha'(t)\|N(t),$$

onde $k(t)$ é a curvatura de α em t . Portanto a velocidade da curva $T(t)$ é $|k(t)| \|\alpha'(t)\|$, ou simplesmente $|k(t)|$, se α estiver parametrizada pelo comprimento de arco. Decorre da expressão acima que T percorre o círculo unitário no sentido anti-horário, se $k(t) > 0$ e no sentido horário, se $k(t) < 0$.

Seja φ a função angular para a curva T em relação à origem $(0, 0)$, que satisfaz $\varphi(a) = 0$. Pela equação (1.20), temos que

$$\varphi(t) = \int_a^t \langle T^\perp, T' \rangle(\varepsilon) d\varepsilon = \int_a^t k(\varepsilon)\|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon.$$

Portanto

$$\varphi'(t) = k(t)\|\alpha'(t)\|. \quad (1.22)$$

No caso em que α está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que a curvatura de α é exatamente a taxa de variação do ângulo orientado, determinado pelos vetores tangente à curva α e o vetor $T(a)$. Observe que o vetor $T(a)$ pode ser substituído por qualquer outro vetor fixo, sem alterar o valor de φ .

Definição 1.14 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe \mathcal{C}^2 . A curvatura total $CT(\alpha)$ da curva α é dada por*

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon)\|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon.$$

Observe que o teorema de mudança de variáveis para integrais implica que $CT(\alpha)$ é invariante por reparametrizações próprias de classe \mathcal{C}^2 de α . A curvatura total representa, geometricamente, a menos de um fator constante, o “comprimento algébrico”

co” da imagem de T sobre o círculo unitário, isto é, os arcos que T percorre no sentido anti-horário são considerados com comprimento positivo, enquanto aqueles que T percorre no sentido horário são considerados com comprimento negativo. Em particular, temos que

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{X}(T(a), T(b)).$$

No caso em que α é uma curva fechada, regular e de classe \mathcal{C}^1 , sua indicatriz tangente T é uma curva fechada, portanto o índice de rotação de α é dado por

$$R_\alpha = W(T, (0, 0)) = \frac{1}{2\pi} \varphi(b) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = CT(\alpha).$$

Como conseqüência, chegamos a um resultado surpreendente: a curvatura total de uma curva fechada é sempre um número inteiro. Mesmo para curvas simples, tal resultado não é óbvio.

Teorema 1.5 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, regular e de classe \mathcal{C}^2 . Então sua curvatura total $CT(\alpha)$ é dada por*

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = R_\alpha,$$

onde R_α é o índice de rotação de α . Em particular, $CT(\alpha)$ é sempre igual a um número inteiro.

Exemplo 1.16 *Considere a elipse $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Temos que $R_\alpha = 1$, o que implica então que $CT(\alpha) = 1$. Calculando diretamente a curvatura total de α , obtemos que*

$$k(t) \|\alpha'(t)\| = \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \sin^2 \varepsilon + b^2 \cos^2 \varepsilon} d\varepsilon = CT(\alpha) = 1.$$

O resultado não é de modo algum óbvio (tente calcular analiticamente. É possível!!!).

Visto que o índice de rotação de uma curva é invariante por homotopias regulares, a sua curvatura total também é invariante por homotopias regulares. Vamos usar a fórmula do número de interseções para calcular $W(T, (0, 0))$ e, portanto, a curvatura total de α . Seja v_0 um vetor unitário fixado e considere o raio r_{v_0} com origem em $(0, 0)$ e na direção de v_0 parametrizado por $r_{v_0}(s) = v_0 s$, $s \in [0, \infty)$. Como $T(t)$ está sobre o círculo unitário, o raio r_{v_0} irá intersectar o traço de T no máximo quando $s = 1$. Essa interseção, em geral, se dá em um ponto múltiplo. Para obtenção de todas essas interseções, devemos saber para quais valores do parâmetro t temos que

$$T(t) = v_0.$$

Suponha que, apenas para um número finito de valores t_1, \dots, t_k , a equação acima seja satisfeita. Observe que a condição para que cada interseção seja transversal é dada por

$$0 \neq \langle T'(t_i), v_0^\perp \rangle = \langle k(t_i) \|\alpha'(t_i)\| N(t_i), N(t_i) \rangle = k(t_i) \|\alpha'(t_i)\|,$$

para todo $i = 1, \dots, k$, isto é, se $k(t_i) \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, k$, o número de interseções em cada t_i é

$$v(t_i) = \text{sinal} \langle T'(t_i), v_0^\perp \rangle = \text{sinal} k(t_i).$$

Portanto, nesse caso, verifica-se a seguinte relação:

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = R_\alpha = W(T, (0, 0)) = \sum_{i=1}^k \text{sinal} k(t_i).$$

Novamente, é surpreendente que o último membro da equação anterior não dependa da escolha particular do vetor v_0 nas condições acima.

1.12 Índice de Rotação de Curvas Fechadas Simples

O índice de rotação R_α de uma curva regular fechada α é, por definição, o número de rotação da curva α' . Portanto o índice de rotação fornece uma informação sobre o comportamento global de α' , que, a princípio, não tem por que ser parecido com o comportamento global de α . Por outro lado, α' determina, a menos de uma translação, a curva original α e reciprocamente. Logo não seria de todo surpreendente que o índice de rotação R_α nos desse alguma informação sobre a geometria de α . Vamos discutir um importante resultado nessa direção. Para curvas fechadas, regulares e simples, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.6 (*Teorema da Rotação das Tangentes*) *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, fechada, simples e de classe \mathcal{C}^1 . Então*

$$R_\alpha = \pm 1.$$

Além disso, se α é de classe \mathcal{C}^2 , então sua curvatura total $CT(\alpha)$ satisfaz

$$CT(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(\varepsilon) \|\alpha'(\varepsilon)\| d\varepsilon = \pm 1.$$

Decorre diretamente desse resultado a seguinte consequência:

Corolário 1.3 *Toda curva α fechada, regular e de classe \mathcal{C}^1 com $R_\alpha = 0$ ou $|R_\alpha| \geq 2$ possui auto-interseção. Se α é uma curva*

fechada e de classe \mathcal{C}^2 , com curvatura total satisfazendo $CT(\alpha) = 0$ ou $|CT(\alpha)| \geq 2$, então α possui pontos de auto-interseção.

Observe que a recíproca desse resultado não é verdadeira, isto é, não é verdade, em geral, que se o índice de rotação de uma curva for igual a ± 1 , a curva seja simples. Como exemplo, considere a lemniscata com laço (veja exemplo 1.15). Ela tem índice de rotação igual a um e não é simples.

Capítulo 2

Curvas Convexas

Neste capítulo, estudaremos as propriedades geométricas das curvas regulares cuja curvatura não troca de sinal. Inicialmente, introduziremos o conceito de curva localmente convexa.

Definição 2.1 Dizemos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexa em $t_0 \in I$, se existe $\delta > 0$, tal que $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ esteja inteiramente contido num dos semi-planos determinados pela reta tangente à α em t_0 . A curva α é dita estritamente convexa em t_0 , se α é convexa em t_0 e existe $\delta > 0$, tal que $\alpha(t_0)$ é o único ponto de $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ sobre a reta tangente de α em t_0 .

A definição de curva convexa em t_0 implica que, para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, a função definida por

$$h_{t_0}(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle,$$

onde $N(t)$ é o campo normal de α , não muda de sinal.

Proposição 2.1 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e de classe \mathcal{C}^2 . Se a curvatura de α em $t_0 \in I$ é não-nula, então α é estritamente convexa em t_0 .

Prova. Suponha que $k(t_0) > 0$. Pela observação acima, devemos provar que existe $\delta > 0$, tal que a função h_{t_0} seja não-negativa em $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, e $h_{t_0}(t) = 0$ nesse intervalo, se e somente se $t = t_0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco. Nesse caso,

$$h'_{t_0}(t_0) = \langle \alpha'(t_0), N(t_0) \rangle = 0$$

e

$$h''_{t_0}(t_0) = k(t_0) > 0.$$

Portanto t_0 é um ponto de mínimo estrito local de h_{t_0} . Como $h_{t_0}(t_0) = 0$, existe $\delta > 0$, tal que $h_{t_0}(t) > 0$, para todo $0 < |t - t_0| < \delta$. Isso conclui a prova no caso em que $k(t_0) > 0$. A prova no caso em que $k(t_0) < 0$ é análoga.

□

O próximo resultado nos permite considerar o caso em que a curvatura se anula, mas não muda de sinal.

Proposição 2.2 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular com curvatura k . Suponha que existe $\delta > 0$, tal que, para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$, $k(t) \geq 0$. Então α é convexa em t_0 . Além disso, o traço de $\alpha|_{(t_0 - \delta, t_0 + \delta)}$ está contido no semi-plano determinado pela reta tangente à curva α em t_0 para o qual aponta o vetor $N(t_0)$.*

Prova. Escolha o sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de modo que $\alpha(t_0) = (0, 0)$, $T(t_0) = (1, 0)$ e $N(t_0) = (0, 1)$. Suponha, sem perda de generalidade, que α esteja parametrizada pelo comprimento de arco e, em relação ao sistema de coordenadas acima, seja dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

A prova reduz-se, nesse caso, a mostrar que existe $\delta_1 > 0$, tal que $y(t) \geq 0$, para todo $t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$. Considere a função θ , definida por

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t k(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Pela equação (1.12),

$$(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) = (\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)).$$

Como $k(t) \geq 0$, $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, existe $0 < \delta_1 \leq \delta$, tal que

$$y'(t) = \operatorname{sen} \theta(t) \geq 0, \quad \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_1,$$

e

$$y'(t) = \operatorname{sen} \theta(t) \leq 0, \quad \text{se } t_0 - \delta_1 \leq t \leq t_0.$$

Logo a função y é não-crescente no intervalo $[t_0 - \delta_1, t_0]$ e não-decrescente em $[t_0, t_0 + \delta_1]$. Como $y(t_0) = 0$, temos que $y(t) \geq 0$, para todo $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$, o que conclui a prova. \square

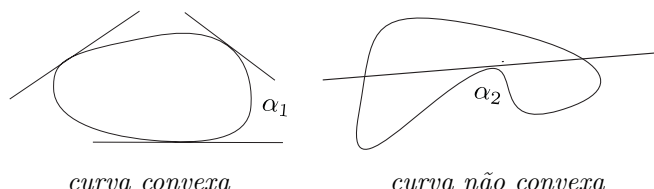
2.1 Curvas Fechadas e Convexas

Dizemos que uma curva regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é *convexa*, se, para cada $t_0 \in [a, b]$, o traço de α está inteiramente contido em um dos semi-planos determinados pela reta tangente à α em t_0 . De modo mais preciso, ser convexa significa que, para todo $t_0 \in [a, b]$, a função h_{t_0} , definida por

$$h_{t_0}(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), N(t_0) \rangle,$$

não muda de sinal em $[a, b]$. Em particular, α é convexa em todo $t \in [a, b]$. A curva α é dita *estritamente convexa* em t_0 , se o

traço de α , exceto pelo ponto $\alpha(t_0)$, está inteiramente contido no semi-plano aberto determinado pela reta tangente à curva α em $\alpha(t_0)$. Em termos da função h_{t_0} , definida acima, esta propriedade significa que h_{t_0} somente se anula em $t = t_0$.



Na seção anterior, vimos que a noção de convexidade está fortemente ligada com a curvatura de α . De fato, para curvas fechadas e simples, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Uma curva regular, fechada e simples $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexa, se e somente se sua curvatura não muda de sinal.*

Prova. Como α é uma curva de Jordan, pelo Teorema de Jordan, seu traço delimita uma região limitada e conexa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Orientamos α de modo que em algum $s_0 \in [a, b]$ o vetor normal no ponto $\alpha(s_0)$ aponta para a região Ω . Pela continuidade do vetor normal N de α , temos que, para todo $s \in [a, b]$, $N(s)$ aponta para Ω . Observe que em s_0 , $k(s_0) \geq 0$, uma vez que o traço de α está contido no semi-plano determinado pela reta tangente a α em s_0 . Como k não muda de sinal, $k(s) \geq 0$, para todo $s \in [a, b]$. Vamos provar que α é convexa. Fixe $s_1 \in [a, b]$ e vamos mostrar que a função

$$h_{s_1}(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_1), N(s_1) \rangle,$$

não muda de sinal em $[a, b]$. Suponha, por contradição que isso não ocorre. Como h_{s_1} é contínua, ela assume um mínimo negativo e um máximo positivo em pontos s_2 e s_3 , distintos de s_1 .

Como $h'_{s_1}(s) = \langle \alpha'(s), N(s_1) \rangle$, as retas tangentes à curva α em s_1 , s_2 e s_3 são paralelas. Por hipótese, α é uma curva simples. Logo, pelo Teorema 1.6, seu índice de rotação é $R_\alpha = \pm 1$ e com a orientação que escolhermos, $R_\alpha = 1$. Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função angular para indicatriz tangente de α em relação a $(0, 0)$, com $\phi(a) = 0$. Observe que, pela equação (1.22), a derivada de ϕ é dada por $\phi'(t) = k(t)\|\alpha'(t)\| \geq 0$. Logo ϕ é não-decrescente. Como $R_\alpha = 1$ e ϕ é não-decrescente, a imagem de ϕ é o intervalo $[0, 2\pi]$. Como temos pelo menos três pontos do traço de α com retas tangentes paralelas, em pelo menos dois desses pontos, a função ϕ possui o mesmo valor. Como ϕ é não-decrescente, ela deve ser constante em algum intervalo da forma $[s_i, s_j]$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Isto significa que o traço de α contém um segmento de reta ligando $\alpha(s_i)$ a $\alpha(s_j)$. Portanto $h_{s_1}(s_i) = h_{s_1}(s_j)$, o que contradiz a escolha dos pontos s_2 e s_3 . Logo h_{s_1} não muda de sinal. Como s_1 é arbitrário em $[a, b]$, α é convexa.

Reciprocamente, vamos provar que, com essa orientação escolhida anteriormente, $k(s) \geq 0$. Suponha que para algum $s_1 \in [a, b]$, $k(s_1) < 0$. Escolhemos um sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de modo que

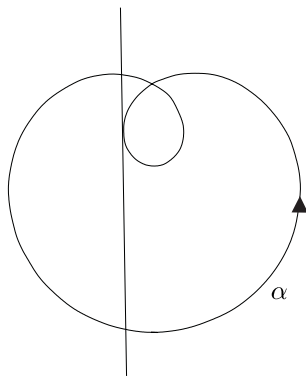
$$\begin{cases} \alpha(s_1) = (s_1, 0), \\ \alpha'(s_1) = (1, 0). \end{cases}$$

Nesse caso, podemos reparametrizar uma vizinhança do ponto $\alpha(s_1)$ de modo que o traço de α seja dado pelo gráfico de uma função $f : (s_1 - \varepsilon, s_1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. Observe que, como $k(s_1) < 0$, pela equação (1.14), para s suficientemente próximo de s_1 ,

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_1), N(s_1) \rangle = \frac{k(s_1)}{2}(s - s_1)^2 + R(s) < 0,$$

onde $\lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\|R(s)\|}{(s - s_1)^2} = 0$. Isso implica que, para ε suficientemente pequeno, $f(s) > 0$, se $0 < |s - s_1| < \varepsilon$. Como $k(s_1) < 0$, temos $N(s_1) = (0, -1)$ e, portanto, existem pontos do traço de α com a coordenada $y < 0$. Por outro lado, a reta tangente à α em $\alpha(s_1)$ é a reta $y = 0$. Logo existem pontos do traço de α de ambos os lados dessa reta, contradizendo a hipótese que α é uma curva convexa. \square

Observação 2.1 A condição que α é uma curva simples é essencial no Teorema 2.1, como pode ser observado na figura abaixo.



A curva α possui curvatura sempre positiva, mas não é convexa.

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan. Pelo Teorema de Jordan, ela delimita uma região Ω do plano. Uma pergunta natural: quais as propriedades deve ter o conjunto Ω , se a curva α for convexa? Veremos que, de fato, Ω deve ser convexo como conjunto de \mathbb{R}^2 . Para entender melhor esse fato, vamos lembrar o que significa um conjunto de \mathbb{R}^2 ser convexo. Vamos inicialmente introduzir alguma notação. Dados dois pontos P e Q , vamos denotar por $[PQ]$ o segmento de reta de extremos P e Q , isto é,

$$[PQ] = \{tQ + (1 - t)P, 0 \leq t \leq 1\}.$$

De modo análogo, o segmento aberto de extremos P e Q é dado por

$$]PQ[= \{tQ + (1-t)P, 0 < t < 1\}.$$

Com essa notação, lembramos que um conjunto A é convexo, se e somente se para todo par de pontos P, Q de A , $[PQ] \subset A$.

Dado um ponto $P \in \mathbb{R}^2$, se $B_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \|P-Q\| < \varepsilon\}$, então umas das três possibilidades abaixo podem ocorrer:

1. Existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(P) \subset A$. Nesse caso, P é dito ponto interior de A .
2. Existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(P) \cap A = \emptyset$. Nesse caso, P é dito ponto exterior de A .
3. Para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^2 - A) \neq \emptyset$. Nesse caso, P é dito ponto de fronteira de A .

O conjunto de pontos interiores de A é chamado de interior de A e será denotado $\overset{\circ}{A}$ ou $intA$. O conjunto de pontos de fronteira é chamado fronteira ou bordo de A e será denotado por ∂A . O fecho de A é dado por $\overset{\circ}{A} \cup \partial A$ e será denotado por \bar{A} . A primeira propriedade que iremos provar é uma caracterização dos conjuntos convexos de \mathbb{R}^2 com interior vazio.

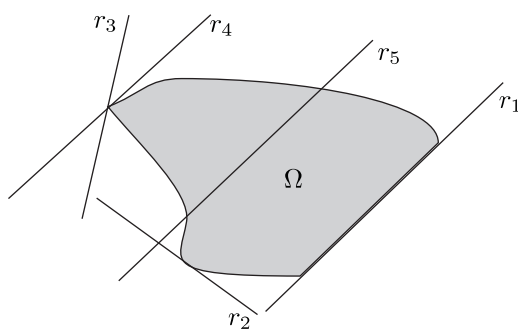
Proposição 2.3 *Seja Ω um conjunto convexo de \mathbb{R}^2 com interior vazio. Então Ω está contido em uma reta.*

Prova. Se Ω possui no máximo um ponto, nada há que se provar. Suponha que existam dois pontos distintos P e Q em Ω . Como Ω é convexo, $[PQ] \subset \Omega$. Vamos provar que Ω está contido na reta r determinada por P e Q . Suponha por contradição que existe um ponto $T \in \Omega$ com $T \notin r$. Sendo Ω convexo, ele contém

todos os segmentos de reta da forma $[TX]$, com $X \in [PQ]$. Portanto Ω contém a região limitada pelo triângulo $\triangle PQT$. Como essa região possui pontos interiores, chegamos a uma contradição com o fato que o interior de Ω é vazio. \square

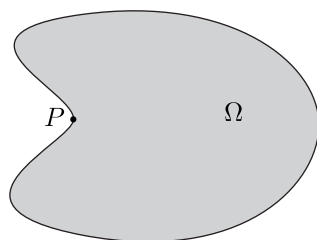
Uma noção útil para o estudo de conjuntos convexos é a reta suporte.

Definição 2.2 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ e $P \in \bar{A}$. Diremos que uma reta r passando por P é uma reta suporte para A em P , se A estiver totalmente contido em um dos semi-planos fechados determinados por r .*



r_1, r_2, r_3 e r_4 são retas suporte para Ω ; r_5 não é reta suporte para Ω .

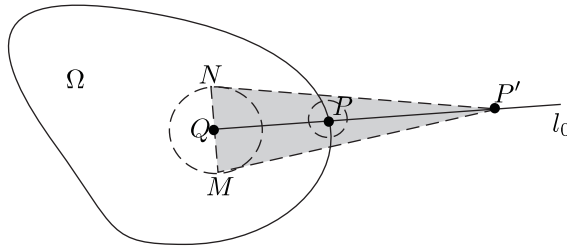
Observe que, se $P \in \overset{\circ}{A}$, então não existem retas suporte para A passando por P . Mesmo para pontos da fronteira de A , pode não existir reta suporte passando por esses pontos.



No entanto, conjuntos convexos possuem reta suporte passando por todo ponto de sua fronteira, como mostra o seguinte resultado:

Proposição 2.4 *Se Ω é convexo e $P \in \partial\Omega$, então existe uma reta suporte para Ω passando por P .*

Prova. Se o interior de Ω é vazio, o resultado segue da Proposição 2.3. Suponhamos que $\overset{\circ}{\Omega} \neq \emptyset$ e seja $Q \in \overset{\circ}{\Omega}$. Seja \overrightarrow{QP} a semi-reta com origem em Q e passando por P . Considere l_0 a semi-reta com origem em P e que está contida em \overrightarrow{QP} . Vamos provar inicialmente que l_0 intersecta $\overline{\Omega}$ apenas no ponto P . Por contradição, suponha que existe $P' \neq P$, com $P' \in \overline{\Omega} \cap l_0$. Como Q está no interior de Ω , existe uma bola aberta $B_\epsilon(Q)$ inteiramente contida em Ω e, portanto, existe um segmento de reta $]MN[$, centrado em Q , de comprimento 2ϵ , perpendicular a \overrightarrow{QP} e que está inteiramente contido em Ω . Sendo Ω convexo, para todo $X \in]MN[$, o segmento $[XP']$ está contido em Ω . Portanto Ω contém a região limitada pelo triângulo $\triangle MNP'$ e P é um ponto do interior dessa região, contradizendo o fato de $P \in \partial\Omega$.

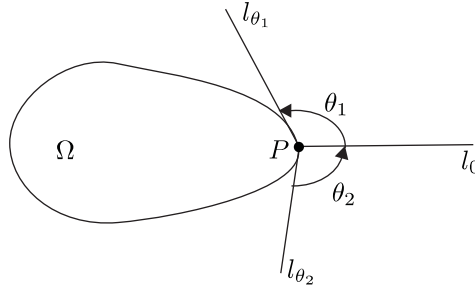


Seja u_0 o vetor diretor unitário para a semi-reta l_0 , isto é $l_0 = \{P + tu_0, t \geq 0\}$. Considere agora l_θ , $\theta \in [0, 2\pi]$, a semi-reta com origem em P e com vetor diretor u_θ , onde $\theta = \angle(u_0, u_\theta)$. Sejam

$$\theta_1 = \sup\{\theta \mid \overline{\Omega} \cap l_\theta = \{P\}\}$$

e

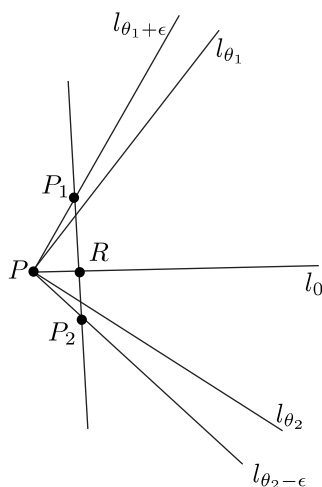
$$\theta_2 = \sup\{\theta \mid \overline{\Omega} \cap l_{2\pi-\theta} = \{P\}\}.$$



Observe que $\theta_1 + \theta_2 \geq \pi$. De fato, se $\theta_1 + \theta_2 < \pi$, temos que as semi-retas $l_{\theta_1+\epsilon}$ e $l_{\theta_2-\epsilon}$, com $0 < \epsilon < \frac{\pi-\theta_1-\theta_2}{2}$, são tais que:

1. Existem $P_1 \in l_{\theta_1+\epsilon} \cap \overline{\Omega}$ e $P_2 \in l_{\theta_2-\epsilon} \cap \overline{\Omega}$, com $P_i \neq P$, $i = 1, 2$;
2. O ângulo entre essas semi-retas é menor que π ;
3. A semi-reta l_0 divide o ângulo determinado por $l_{\theta_1+\epsilon}$ e $l_{\theta_2-\epsilon}$.

Como Ω é convexo, o segmento $[P_1P_2]$ está contido em Ω e pelas propriedades 2 e 3 acima, segue-se que $[P_1P_2] \cap l_0 = \{R\}$, com $R \neq P$, o que contradiz o fato que $l_0 \cap \Omega = \{P\}$.



Uma vez que $\theta_1 + \theta_2 > \pi$, temos que qualquer reta r passando por P e contida na região limitada por $l_{\theta_1+\epsilon}$ e $l_{\theta_2-\epsilon}$, que não contém Ω é reta suporte para Ω passando por P .

□

O próximo resultado será útil na prova da relação entre a convexidade de uma curva de Jordan e a convexidade da região que ela delimita.

Lema 2.1 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan, regular e de classe \mathcal{C}^1 e seja Ω o fecho da região delimitada pelo traço de α . Se Ω é um conjunto convexo, então, para todo $t \in [a, b]$, a reta tangente à curva α em t é a única reta suporte para Ω passando por $\alpha(t)$.*

Prova. Como $\partial\Omega = \text{traço de } \alpha$, a existência da reta suporte em cada ponto $\alpha(t)$ é garantida pela Proposição 2.4. Vamos provar a unicidade de tal reta. Fixe $t_0 \in [a, b]$. Sem perda de generalidade, podemos supor que α está parametrizada pelo comprimento de arco e vamos orientá-la de modo que $N(t_0)$ aponte

para região Ω . Vamos escolher o sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de modo que

$$P = \alpha(t_0) = (t_0, 0) \quad \text{e} \quad \alpha'(t_0) = (1, 0).$$

Com essa escolha, $N(t_0) = (0, 1)$ e a reta tangente à curva α em t_0 é o eixo $0x$. Usando a Proposição 1.2, existe $\epsilon > 0$ tal que a parte do traço de α que está contida na bola $B_\epsilon(P)$ de centro P e raio ϵ é o gráfico de uma função diferenciável $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde I é um intervalo contendo t_0 . Da escolha do sistema de coordenadas, temos que

$$f(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(t_0) = 0.$$

Diminuindo-se ϵ , se necessário, podemos afirmar que

$$\text{int}\Omega \cap B_\epsilon(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - t_0)^2 + y^2 < \epsilon^2 \text{ e } y > f(x)\}.$$

Vamos provar que toda reta que passa por P , diferente do eixo $0x$, passa por pontos do interior de Ω e, portanto, não pode ser reta suporte para Ω . Seja r uma tal reta. A equação de r é da forma

$$y = m(x - t_0), \quad m \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow t_0} \frac{m(x - t_0) - f(x)}{x - t_0} &= m - \lim_{x \rightarrow t_0} \frac{f(x)}{x - t_0} \\ &= m - \lim_{x \rightarrow t_0} \frac{f(x) - f(t_0)}{x - t_0} = m - f'(t_0) = m. \end{aligned}$$

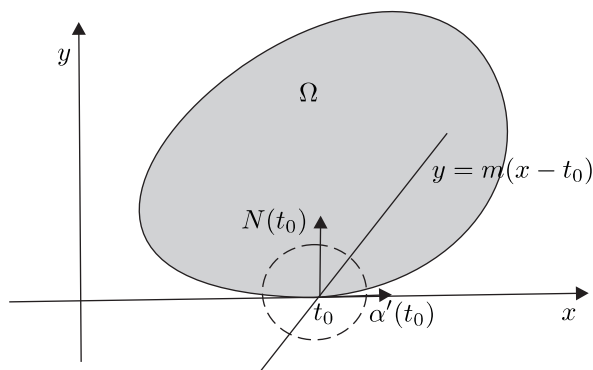
Suponha que $m > 0$. Pela definição de limite, dado $\epsilon > 0$, com $0 < \epsilon < m$, existe $\delta > 0$, tal que para todo x , com $0 < x - t_0 < \delta$, tem-se que $(x, f(x)) \in B_\epsilon(P)$, $(x, m(x - t_0)) \in B_\epsilon(P)$ e

$$m - \epsilon < \frac{m(x - t_0) - f(x)}{x - t_0} < m + \epsilon.$$

Logo, pela escolha de ε , temos que

$$m(x - t_0) - f(x) > 0,$$

ou seja, $m(x - t_0) > f(x)$.



Portanto $(x, m(x - t_0)) \in \text{int}\Omega \cap B_\varepsilon(P)$ para todo x , com $0 < x < \delta$. Isso implica que existem pontos da reta r no interior de Ω . A prova no caso em que $m < 0$ é análoga. □

Podemos finalmente provar a relação entre a convexidade de uma curva de Jordan e a convexidade da região que ela delimita.

Teorema 2.2 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan, regular e de classe \mathcal{C}^1 e seja Ω a região delimitada pelo traço de α . Então Ω é uma região convexa, se e somente se a curva α é convexa.*

Prova Observe que, se Ω é convexo, então $\overline{\Omega}$ é convexo. Logo, para cada $t \in [a, b]$, o lema anterior nos diz que $\overline{\Omega}$ está inteiramente contido em um dos semi-planos fechados determinados pela reta tangente à α em $\alpha(t)$. Claramente, todo $Q \in$

$\partial\bar{\Omega}$ = traço de α também está nesse semi-plano, o que prova que α é convexa.

Reciprocamente, suponha que α é uma curva convexa. Para cada $t \in [a, b]$, seja \mathcal{H}_t o semi-plano fechado determinado pela reta tangente à α em t que contém o traço de α . Considere

$$\mathcal{H} = \bigcap_{t \in [a, b]} \mathcal{H}_t.$$

Como cada \mathcal{H}_t é um conjunto convexo, segue-se que \mathcal{H} também é convexo. Vamos provar inicialmente que

$$\bar{\Omega} = \mathcal{H},$$

e, portanto, $\bar{\Omega}$ é um conjunto convexo. Seja $P \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}$. Pela definição de \mathcal{H} , existe $t_0 \in [a, b]$, tal que $P \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_{t_0}$. Logo a reta r paralela à reta tangente a α em t_0 , que passa por P , não intersecta o traço de α . Usando a fórmula do número de interseções, com uma das semi-retas de r com origem P , concluímos que $W(\alpha, p) = 0$. Portanto $P \notin \bar{\Omega}$. Provamos, então, que $\bar{\Omega} \subset \mathcal{H}$. Suponha agora que $P \notin \bar{\Omega}$ e seja $t_0 \in [a, b]$, tal que $\alpha(t_0)$ é o ponto do traço de α mais próximo de P , isto é, t_0 é o mínimo absoluto da função, dada por

$$p(t) = \|\alpha(t) - P\|^2 = \langle \alpha(t) - P, \alpha(t) - P \rangle.$$

Como p é diferenciável, $p'(t_0) = 0$, o que implica que

$$\langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) - P \rangle = 0.$$

Vamos provar que $P \notin \mathcal{H}_{t_0}$. Caso $P \in \mathcal{H}_{t_0}$, a semi-reta de origem P passando por $\alpha(t_0)$ intersecta o traço de α apenas em $\alpha(t_0)$ (caso contrário, $\alpha(t_0)$ não seria o ponto do traço de α mais próximo de P) e é perpendicular ao traço de α nesse

ponto. Usando a fórmula do número de interseções, temos que $W(\alpha, p) = \pm 1$, o que contradiz o fato que $P \notin \bar{\Omega}$. Logo $\mathcal{H} \subset \bar{\Omega}$. Mostramos, portanto, que $\mathcal{H} = \bar{\Omega}$. Vamos provar agora que Ω é convexo. Sejam $P, Q \in \Omega$. Visto que $\bar{\Omega}$ é convexo, $[PQ] \subset \bar{\Omega}$. Suponha, por contradição, que existe $t_1 \in [a, b]$, tal que $\alpha(t_1) \in [PQ]$. A convexidade de $\bar{\Omega}$, pelo Lema 2.1, implica que $[PQ]$ deve estar contido na reta tangente à curva α em t_1 , uma vez que essa é a reta suporte para $\bar{\Omega}$ passando por $\alpha(t_1)$. Logo P e Q seriam pontos de $\partial\Omega$, o que é uma contradição. \square

Segue-se da convexidade da região limitada por uma curva convexa, o seguinte resultado:

Corolário 2.1 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan, regular e de classe \mathcal{C}^1 . Se r é uma reta transversal ao traço de α , então r intersecta o traço de α em exatamente dois pontos.*

Veremos a seguir que a indicatriz tangente de uma curva fechada e simples é sobrejetiva.

Proposição 2.5 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, regular e simples. Então existe uma orientação de α , tal que*

$$T(A) = \mathbb{S}^1,$$

onde $A = \{t \in [a, b] \mid k(t) \geq 0\}$, T é a indicatriz tangente de α e \mathbb{S}^1 é o círculo unitário.

Prova. Como α é regular, podemos supor, sem perda de generalidade, que α está parametrizada pelo comprimento de arco. Inicialmente, pelo Teorema de Jordan, podemos supor que α está orientada de modo que seu campo normal N aponta sempre para

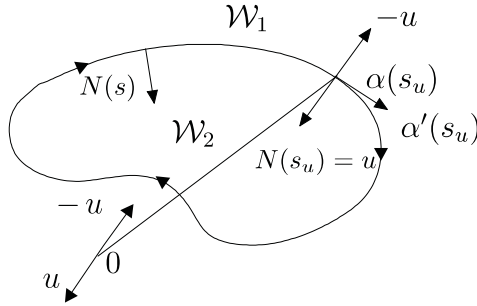
a região \mathcal{W}_2 , limitada pelo traço de α . Seja $v \in \mathbb{S}^1$. Considere a função altura p , definida por

$$p(s) = \langle u, \alpha(s) \rangle,$$

onde $u = v^\perp$ é o vetor obtido de v pela rotação de $\frac{\pi}{2}$. Observe que, como p é uma função diferenciável em $[a, b]$, p possui um mínimo global em $s_u \in [a, b]$ e, portanto,

$$0 = p'(s_u) = \langle u, \alpha'(s_u) \rangle.$$

Assim, em s_u , $u = \pm N(s_u)$.



Considere a função auxiliar f medindo a distância “orientada por u ” de $\alpha(s)$ até a reta tangente à α em s_u , mais precisamente,

$$f(s) = \langle u, \alpha(s) - \alpha(s_u) \rangle.$$

Temos que $f(s_u) = 0$ e f possui um mínimo global em s_u , visto que f difere de p por uma constante. Com isso, concluímos que o traço de α está inteiramente contido no semi-plano determinado pela reta tangente à α em s_u , para o qual aponta o vetor u . Esse fato acarreta que

$$u = N(s_u).$$

Usando que s_u é ponto de mínimo de p , obtemos

$$k(s_u) = \langle \alpha''(s_u), N(s_u) \rangle = \langle \alpha''(s_u), u \rangle = p''(s_u) \geq 0$$

e, portanto, $s_u \in A$. Além disso, pela construção de u ,

$$T(s_u) = v.$$

Provamos assim, que, para todo $v \in \mathbb{S}^1$, existe $s \in A$, tal que $T(s) = v$, isto é, $T(A) = \mathbb{S}^1$. \square

Desse último resultado decorre imediatamente o seguinte fato.

Corolário 2.2 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, regular e simples e seja $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$ sua indicatriz tangente. Então T é sobrejetiva.*

O próximo resultado vai estimar a integral da curvatura de uma curva fechada, regular e simples, ao longo dos arcos em que a curvatura é não-negativa.

Proposição 2.6 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, regular e simples. Então existe uma orientação de α , tal que, se k é integrável no conjunto $A = \{t \in [a, b] \mid k(t) \geq 0\}$, então*

$$\frac{1}{2\pi} \int_A k(t) \|\alpha'(t)\| dt \geq 1.$$

Prova. Pela Proposição 2.5, existe uma orientação de α , tal que a imagem de A pela indicatriz tangente T é o círculo unitário \mathbb{S}^1 . Nesse caso, o comprimento de $T|_A$ é maior ou igual a 2π . Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_A k(s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_A |k(s)| ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_A \|\alpha''(s)\| ds = \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}(T|_A) \geq 1. \end{aligned} \quad \square$$

Observação 2.2 A hipótese de que α é uma curva simples é essencial na Proposição 2.6. De fato, a curva $\alpha : [-\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (\cos t, \cos t \operatorname{sen} t),$$

é tal que

$$k(t) = \frac{\cos t(1 + 2 \operatorname{sen}^2 t)}{(1 - 3 \operatorname{sen}^2 t + 4 \operatorname{sen}^4 t)^{3/2}}.$$

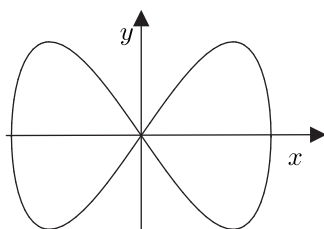
Logo $A = [-\pi/2, \pi/2]$ e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |k(t)| \|\alpha'(t)\| dt = \frac{3}{4} < 1.$$

Se trocamos a orientação de α , o conjunto onde $k(s) \geq 0$, nesse caso, é $[\pi/2, 3\pi/2]$ e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |k(t)| \|\alpha'(t)\| dt = \frac{3}{4} < 1.$$

Portanto, com qualquer orientação, a curvatura absoluta total dos arcos de α com curvatura positiva é menor que um.



O Teorema ?? nos apresentou uma estimativa da curvatura total de uma curva fechada e regular α , isto é, $CA(\alpha) \geq 1$. O próximo resultado nos dará informação no caso da igualdade.

Teorema 2.3 *Seja α uma curva de classe \mathcal{C}^2 , fechada e regular. A curvatura total de α é igual a 1, se e somente se α é uma curva simples e convexa.*

Prova. Se $CA(\alpha) = 1$, então, pelo Corolário ??, a curva α é simples. Vamos supor que α está parametrizada pelo comprimento de arco. Assim, usando a Proposição 2.6 com a notação adequada, obtemos

$$1 = CA(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |k(s)| ds \geq \frac{1}{2\pi} \int_A k(s) ds \geq 1.$$

Logo $k(s) \geq 0$, $\forall s \in [a, b]$. Portanto, pelo Teorema 2.1, temos que α é uma curva convexa.

Reciprocamente, se α é uma curva convexa, temos, pelo Teorema 2.1 e uma escolha adequada da orientação de α , que $k(s) \geq 0$. Assim, fazendo uso do Teorema 1.6, obtemos

$$CA(\alpha) = CT(\alpha) = 1. \quad \square$$

Corolário 2.3 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe \mathcal{C}^2 , fechada, regular e com curvatura absoluta total igual a 1. Se $|k(t)| \leq \frac{1}{R}$, então*

$$\mathcal{L}_a^b(\alpha) \geq 2\pi R,$$

onde k é a curvatura de α e R é uma constante positiva.

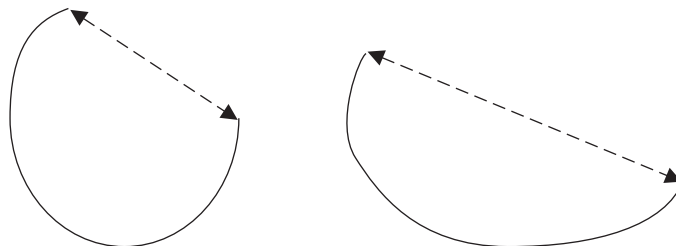
Prova. Usando o teorema anterior e o fato de que $|k(t)| \leq \frac{1}{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 = CA(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b |k(t)| \|\alpha'(t)\| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi R} \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \frac{\mathcal{L}_a^b(\alpha)}{2\pi R}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Logo temos o resultado desejado. \square

2.2 Teorema de Schur

Considere dois arames de mesmo comprimento sobre um plano. Quando os curvamos, intuitivamente, os extremos do arame mais curvado ficam mais próximos do que os extremos do arame menos curvado.



Esse resultado intuitivo é, de fato, verdadeiro e foi demonstrado por A.Schur em [Sc]. A seguir, apresentaremos sua formulação precisa e sua prova, conforme consta em Chern, veja [Ch], p. 36 ou como exercício em do Carmo, [dC], p. 406.

Teorema 2.4 (Schur) *Sejam $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{\alpha} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco e convexas. Denotemos por k e \tilde{k} as curvaturas de α e $\tilde{\alpha}$, respectivamente. Sejam $d(s) = d(\alpha(0), \alpha(s))$ e $\tilde{d}(s) = d(\tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(s))$, onde $d(\cdot, \cdot)$ é a distância Euclidiana de \mathbb{R}^2 . Se $k(s) \geq \tilde{k}(s)$, então*

$$d(s) \leq \tilde{d}(s), \quad s \in [0, l].$$

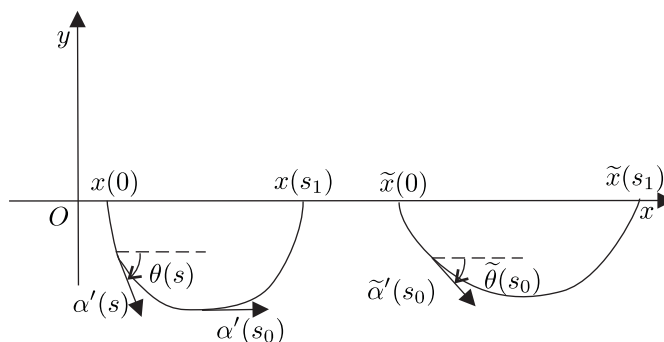
Além disso, $d(s) = \tilde{d}(s)$ para todo $s \in [0, l]$, se e somente se as curvas α e $\tilde{\alpha}$ são congruentes.

Prova. Sejam $T : [0, l] \rightarrow \mathbb{S}^1$ e $\tilde{T} : [0, l] \rightarrow \mathbb{S}^1$ as indicatrizes tangentes de α e $\tilde{\alpha}$, respectivamente, definidas por $T(s) = \alpha'(s)$ e $\tilde{T}(s) = \tilde{\alpha}'(s)$. Fixemos $s_1 \in [0, l]$. Como α e $\tilde{\alpha}$ são curvas

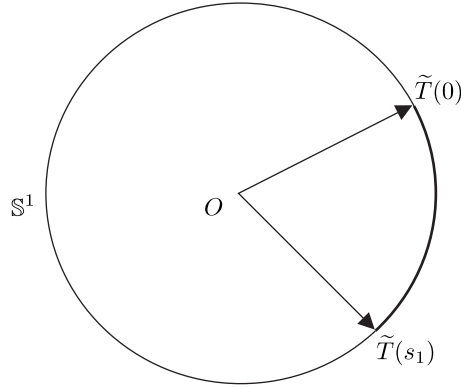
convexas, após um movimento rígido aplicado a uma delas, podemos supor que os segmentos de reta ligando $\alpha(0)$ a $\alpha(s_1)$ e $\tilde{\alpha}(0)$ a $\tilde{\alpha}(s_1)$ estão sobre uma mesma reta r , têm o mesmo sentido e os traços de α e $\tilde{\alpha}$ estão contidos em um mesmo semi-plano determinado por r . Vamos escolher o sistema de coordenadas Oxy de \mathbb{R}^2 , tal que as curvas α e $\tilde{\alpha}$ sejam parametrizadas por

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)),$$

onde $y(s) \leq 0$, $\tilde{y}(s) \leq 0$, $x(0) < x(s_1)$ e $\tilde{x}(0) < \tilde{x}(s_1)$.



Sejam $\theta(s)$ e $\tilde{\theta}(s)$ os ângulos que os vetores $\alpha'(s)$ e $\tilde{\alpha}'(s)$ fazem, respectivamente, com o eixo Ox . Como α e $\tilde{\alpha}$ são curvas convexas, temos, pelo Teorema 2.3, que $-\pi \leq \theta(s) \leq \pi$ e $-\pi \leq \tilde{\theta}(s) \leq \pi$. Denotemos por $\overline{\tilde{T}(0)\tilde{T}(s_1)}$ o comprimento de arco em \mathbb{S}^1 entre $\tilde{T}(0)$ e $\tilde{T}(s_1)$ ou, equivalentemente, o ângulo entre $\tilde{T}(0)$ e $\tilde{T}(s_1)$.



Logo, usando (1.11) e o fato de que $\tilde{k}(s) \leq k(s)$, $\forall s \in [0, l]$, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{T}(0)\tilde{T}(s_1)} &= \tilde{\theta}(s_1) - \tilde{\theta}(0) = \int_0^{s_1} \tilde{\theta}'(s) ds = \int_0^{s_1} \tilde{k}(s) ds \\ &\leq \int_0^{s_1} k(s) ds = \int_0^{s_1} \theta'(s) ds = \theta(s) - \theta(0) = \overline{T(s_1)T(0)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Agora considere $s_0 \in [0, l]$, tal que a reta tangente à curva α nesse ponto seja paralela ao eixo Ox . Tal ponto sempre existe, basta considerar o ponto em que a função coordenada y atinge um mínimo absoluto. Então $\theta(s_0) = 0$ e, portanto, usando o mesmo argumento de (2.2), temos

$$\overline{\tilde{T}(s_0)\tilde{T}(s)} \leq \overline{T(s_0)T(s)}, \quad (2.3)$$

$s \in [0, s_1]$.

Note que o vetor $\tilde{\alpha}(s_0)$ pode não ser paralelo ao eixo Ox . A função cosseno é uma função decrescente quando o seu argumento varia entre 0 e π . Assim, se $0 \leq \overline{T(s_0)T(s)} \leq \pi$, obtemos, usando (2.3), que

$$\cos(\overline{T(s_0)T(s)}) \leq \cos(\overline{\tilde{T}(s_0)\tilde{T}(s)}).$$

Logo, sendo a função cosseno uma função par, temos

$$\cos \theta(s) = \cos(\overline{T(s_0)T(s)}) \leq \cos(\overline{\tilde{T}(s_0)\tilde{T}(s)}) \leq \cos \tilde{\theta}(s). \quad (2.4)$$

Finalmente, se $\{e_1, e_2\}$ denota a base canônica do sistema de coordenadas Oxy de \mathbb{R}^2 , então

$$\alpha'(s) = \cos \theta(s)e_1 + \operatorname{sen} \theta(s)e_2 = x'(s)e_1 + y'(s)e_2.$$

Portanto, usando (2.4), vemos que

$$\begin{aligned} d(s_1) &= \|\alpha(s_1) - \alpha(0)\| = x(s_1) - x(0) = \int_0^{s_1} x'(s) ds \\ &= \int_0^{s_1} \cos \theta(s) ds = \int_0^{s_1} \cos(\overline{T(s_0)T(s)}) ds \\ &\leq \int_0^{s_1} \cos(\overline{\tilde{T}(s_0)\tilde{T}(s)}) ds \leq \int_0^{s_1} \cos \tilde{\theta}(s) ds \quad (2.5) \\ &= \int_0^{s_1} \tilde{x}'(s) ds = \tilde{x}(s_1) - \tilde{x}(0) = \|\tilde{\alpha}(s_1) - \tilde{\alpha}(0)\| \\ &= \tilde{d}(s_1). \end{aligned}$$

Vamos provar o caso da igualdade no teorema. Suponha que $d = \tilde{d}$. Nesse caso, temos igualdade em (2.5), (2.4), (2.3) e (2.2). Logo as curvas α e $\tilde{\alpha}$ têm a mesma curvatura e, portanto, aplicando o Corolário 1.2, obtemos o resultado desejado. \square

O Teorema de Schur tem várias aplicações. Por exemplo, dá uma solução ao seguinte problema minimizante:

Teorema 2.5 *Entre todas as curvas de classe \mathcal{C}^2 , fechadas, regulares, convexas e com curvatura menor ou igual a $\frac{1}{R}$, R uma constante positiva, a que possui o menor comprimento é o círculo de raio R .*

Prova Inicialmente, sem perda de generalidade, podemos supor que as curvas da hipótese do teorema estão parametrizadas pelo comprimento de arco. Agora, pelo Corolário 2.3, temos que os comprimentos de tais curvas são maiores ou iguais a $2\pi R$. Considerando um círculo de raio R , a sua curvatura é $k \equiv \frac{1}{R}$ e seu comprimento é igual a $2\pi R$. Suponha agora que α seja uma curva como nas hipóteses do teorema e tenha comprimento igual a $2\pi R$. Nesse caso, usando a notação do Teorema de Schur, comparemos α com o círculo de raio R , parametrizado pela curva $\tilde{\alpha}$. Assim, como ambas são curvas fechadas, temos que $d(2\pi R) = \tilde{d}(2\pi R) = 0$. Logo a curvatura de α é igual a $\frac{1}{R}$ e, portanto, α é um círculo de raio R . \square

Como uma segunda aplicação do Teorema de Schur, obtemos o seguinte resultado, devido a Schwarz:

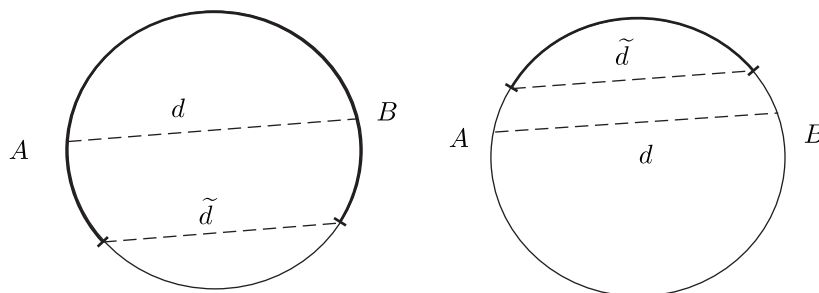
Teorema 2.6 (Schwarz) *Sejam P e Q dois pontos no plano cuja distância é d . Seja α uma curva ligando P a Q com curvatura*

$$k(s) \leq \frac{1}{R}, \quad \text{com } R \geq \frac{d}{2}.$$

Considere um círculo \mathcal{D} de raio R , tal que $P, Q \in \mathcal{D}$. Então o comprimento de α é menor que o comprimento do menor arco de \mathcal{D} determinado por P e Q ou é maior que o comprimento do maior arco de \mathcal{D} , determinado por esses pontos.

Prova. Observemos primeiro que $R \geq \frac{d}{2}$ é uma condição necessária para o círculo \mathcal{D} de raio R existir. Agora, para demonstrarmos o teorema, podemos supor que o comprimento de α é menor que $2\pi R$, caso contrário, segue-se o resultado imediatamente. Assim podemos comparar α com um arco do mesmo

comprimento sobre \mathcal{D} , determinando uma corda de comprimento \tilde{d} . Logo as hipóteses do Teorema de Schur estão satisfeitas e, portanto, $\tilde{d} \leq d$.

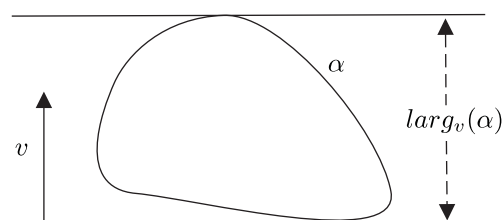


E segue-se o resultado. □

2.3 Curvas de Largura Constante

Nesta seção, iremos introduzir a noção de largura de uma curva no plano em relação a uma direção de \mathbb{R}^2 e mostrar algumas propriedades das curvas de largura constante.

Fixe um vetor v não-nulo em \mathbb{R}^2 . Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e fechada. A *largura* de α em relação à direção v , $larg_v(\alpha)$, é dada pela menor distância entre duas retas paralelas r_1 e r_2 , ortogonais a v e com a propriedade que o traço de α esteja contido na faixa determinada por essas duas retas.

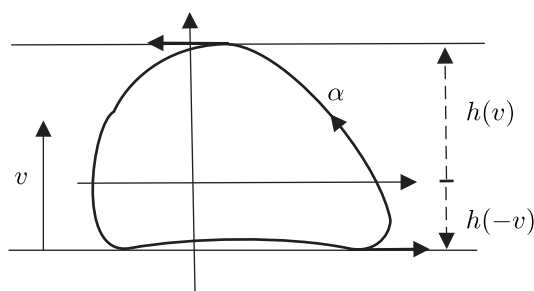


Para que esse conceito se torne mais preciso, para cada $v \in \mathbb{S}^1$, considere a função h , definida por

$$h(v) = \max_{a \leq s \leq b} \langle \alpha(s), v \rangle.$$

O fato da curva α estar definida em um intervalo fechado, acarreta que h está bem definida e representa a maior projeção ortogonal de um ponto do traço de α sobre o vetor v . Em termos de h , podemos escrever a largura de α na direção de v como

$$\text{larg}_v(\alpha) = h(v) + h(-v).$$



Por exemplo, se o traço de α descreve um círculo de raio R , a largura de α , em qualquer direção v , é igual a $2R$.

Observe que o máximo de $\langle \alpha, v \rangle$ é atingido em pontos do traço de α que satisfazem $\langle \alpha'(s), v \rangle = 0$. Logo a reta tangente à curva α é ortogonal a v em cada ponto em que $\langle \alpha(s), v \rangle$ ou $\langle \alpha(s), -v \rangle$ atinge o máximo. No caso em que α é convexa, há exatamente duas retas tangentes à curva α que são ortogonais a v . Tais retas, no entanto, podem ser retas tangentes em mais de um ponto de α .

Definição 2.3 *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua. O diâmetro \mathbb{D} de α é dado por*

$$\mathbb{D} = \max\{\|P - Q\|; P, Q \text{ pontos sobre o traço de } \alpha\}.$$

Para curvas fechadas, os conceitos de largura e diâmetro estão relacionados pelo seguinte resultado:

Proposição 2.7 *Em qualquer curva regular e fechada $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, o seu diâmetro \mathbb{D} é dado por*

$$\mathbb{D} = \max_{v \in \mathbb{S}^1} \text{larg}_v(\alpha).$$

Prova. Seja $\mathbb{L} = \max_{v \in \mathbb{S}^1} \text{larg}_v(\alpha)$. Vamos provar inicialmente que $\mathbb{D} \leq \mathbb{L}$. Seja $d(s, t) = \|\alpha(s) - \alpha(t)\|$, $s, t \in [a, b]$ e seja (s_0, t_0) um ponto em que a função d atinge seu máximo. Como d é diferenciável, temos que

$$\frac{\partial d}{\partial s}(s_0, t_0) = \frac{\partial d}{\partial t}(s_0, t_0) = 0.$$

Essas igualdades significam que

$$\langle \alpha(s_0) - \alpha(t_0), \alpha'(s_0) \rangle = \langle \alpha(s_0) - \alpha(t_0), \alpha'(t_0) \rangle = 0.$$

Portanto as retas tangentes à curva α em $\alpha(s_0)$ e $\alpha(t_0)$ são paralelas, visto que ambas são ortogonais ao vetor $\alpha(s_0) - \alpha(t_0)$. Além disso, o traço de α está inteiramente contido na faixa determinada por essas duas retas. Portanto a distância entre essas retas é igual ao diâmetro de α e também igual à largura de α em relação ao vetor $v = \frac{1}{\|\alpha(s_0) - \alpha(t_0)\|} (\alpha(s_0) - \alpha(t_0))$. Assim

$$\mathbb{D} \leq \mathbb{L}.$$

Reciprocamente, dado $v \in \mathbb{S}^1$, sejam $s_0, t_0 \in [a, b]$, tais que

$$h(v) = \langle \alpha(s_0), v \rangle \quad \text{e} \quad h(-v) = \langle \alpha(t_0), -v \rangle.$$

Então

$$\text{larg}_v(\alpha) = h(v) + h(-v) = \langle \alpha(s_0) - \alpha(t_0), v \rangle \leq \|\alpha(s_0) - \alpha(t_0)\|,$$

e, portanto,

$$\mathbb{D} \geq \text{larg}_v(\alpha).$$

Como essa desigualdade vale para todo $v \in \mathbb{S}^1$, segue-se que

$$\mathbb{D} \geq \mathbb{L}. \quad \square$$

Definição 2.4 Dizemos que uma curva α possui largura constante, se $\text{larg}_v(\alpha)$ é constante igual a \mathbb{L}_0 , para todo $v \in \mathbb{S}^1$. Nesse caso, \mathbb{L}_0 é chamado de largura de α .

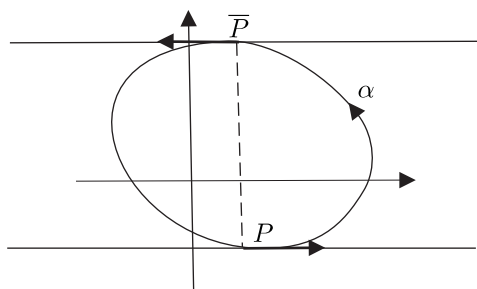
Suponhamos que α seja uma curva fechada, convexa e com largura constante \mathbb{L}_0 . Pela Proposição 2.7, o diâmetro de α também é igual a \mathbb{L}_0 . Vamos ver que esse diâmetro é realizado por muitos pares de pontos sobre o traço de α . De fato, fixado $s_0 \in [a, b]$, seja $s_1 \in [a, b]$, tal que $T(s_1) = -T(s_0)$. Como α é convexa, seu traço fica inteiramente contido em um dos semiplanos determinado pela reta tangente à α em cada ponto. Portanto o traço de α fica inteiramente contido na faixa determinada pelas retas tangentes à curva α em $\alpha(s_0)$ e em $\alpha(s_1)$. Como a largura de α é constante e igual a \mathbb{L}_0 , a distância entre essas retas é \mathbb{L}_0 e, portanto, $\|\alpha(s_0) - \alpha(s_1)\| \geq \mathbb{L}_0$. Visto que o diâmetro de α é igual a \mathbb{L}_0 , temos que $\|\alpha(s_0) - \alpha(s_1)\| = \mathbb{L}_0$. Por outro lado, essa igualdade só ocorre, se $\alpha(s_0) - \alpha(s_1)$ for ortogonal às retas tangentes de α nos pontos $\alpha(s_0)$ e $\alpha(s_1)$. Não existe, contudo, outro ponto $\alpha(s_2)$, tal que $\|\alpha(s_0) - \alpha(s_2)\| = \mathbb{L}_0$, pois, nesse caso, $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$ estariam sobre a reta normal à curva α em $s = s_0$, o que contradiz a hipótese de convexidade de α .

Portanto, para cada ponto P sobre o traço de uma curva α fechada, regular, convexa e de largura constante \mathbb{L}_0 , existe um

único ponto \bar{P} sobre o traço de α , tal que $\|P - \bar{P}\| = \mathbb{L}_0$, e \bar{P} está sobre a reta normal à α no ponto P . O ponto \bar{P} é chamado ponto antípoda de P . No caso em que α está positivamente orientada, sua curvatura é positiva, e o ponto antípoda de P é dado por

$$\bar{P} = P + \mathbb{L}_0 N(P),$$

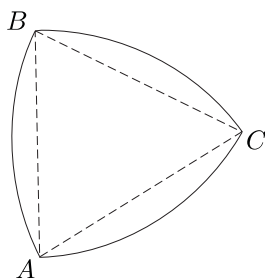
onde N é o vetor normal unitário de α .



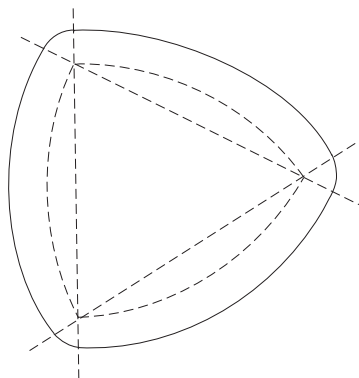
Seja \mathcal{C} o círculo de centro \bar{P} e raio \mathbb{L}_0 . Então \mathcal{C} é tangente à α em P , e o traço de α está inteiramente contido no disco limitado por \mathcal{C} . Pode-se mostrar que a curvatura de α em P é, em módulo, maior ou igual a $\frac{1}{\mathbb{L}_0}$ (veja Lema ??). Temos que toda curva regular, fechada e de largura constante é estritamente convexa.

O leitor deve estar se perguntando: existirá alguma curva de largura constante diferente do círculo? Um primeiro exemplo de curva de largura constante é dado pelo *triângulo de Reuleaux*, que passamos a descrever: considere um triângulo equilátero $\triangle ABC$. Tomando cada vértice de $\triangle ABC$ como centro, construa um arco de círculo ligando os dois vértices remanescentes. A curva obtida pela união dos três arcos de círculo possui largura constante. Observe que, para cada ponto P do triângulo de Reuleaux que não é um vértice, o traço dessa curva está contido na região entre

a reta T_P tangente à curva em P e reta paralela a T_P passando pelo vértice oposto ao arco que contém P . A distância entre essas retas independe da escolha do ponto P e é igual ao lado do triângulo equilátero $\triangle ABC$. Concluimos, portanto, que a largura do triângulo de Reuleaux é constante.



Essa curva, porém, é apenas contínua. Para obtermos uma curva de classe \mathcal{C}^1 , basta construirmos a curva paralela ao triângulo de Reuleaux, obtida pela união de seis arcos de círculo, como mostra a figura abaixo.



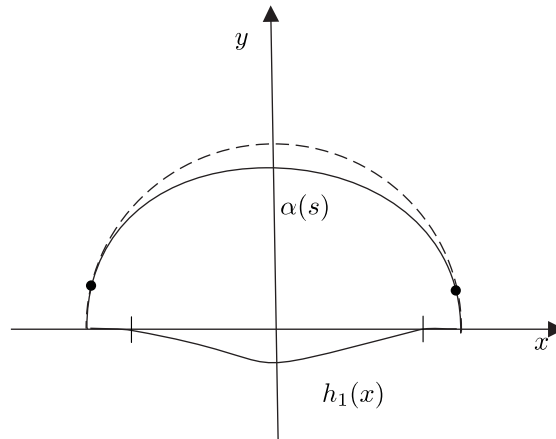
Vamos agora construir uma curva de classe \mathcal{C}^2 e de largura constante. Considere o semi-círculo \mathbb{S}_+^1 , de centro na origem e raio um, com $y \geq 0$. \mathbb{S}_+^1 pode ser obtido como gráfico da função

$h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Seja $h_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função não-constante e de classe \mathcal{C}^∞ , tal que:

- $h_1(x) = 0$, para todo $x \in [-1, -1 + \delta] \cup [1 - \delta, 1]$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno;
- h_1, h_1' e h_1'' são suficientemente próximas de zero, para que a curvatura do gráfico da função H , dada por $H(x) = h(x) + h_1(x)$ seja maior que $\frac{1}{2}$.

Seja $\alpha : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização, pelo comprimento de arco, do gráfico de $H = h + h_1$, com $\alpha(0) = (1, 0)$ e $\alpha(c) = (-1, 0)$. A curva α satisfaz:

1. Existe $\varepsilon > 0$, tal que $\alpha([0, \varepsilon] \cup [c - \varepsilon, c])$ está contido em \mathbb{S}_+^1 ;
2. O traço de α não está contido em \mathbb{S}_+^1 ;
3. A indicatriz tangente T da curva α descreve um semi-círculo;
4. $k(s) > \frac{1}{2}$, onde k é a curvatura de α .



Considere a curva $\beta : [0, 2c] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\beta(s) = \begin{cases} \alpha(s), & \text{se } 0 \leq s \leq c, \\ \alpha(s - c) + 2N(s - c), & \text{se } c \leq s \leq 2c, \end{cases}$$

onde $N(s)$ é o vetor normal unitário de α .

A condição (1) garante que β está bem definida e $\beta(0) = \beta(2c)$. Logo β é uma curva fechada e de classe \mathcal{C}^∞ . Vamos provar que β é regular. A forma como β está definida e pelo fato de α ser regular, resta-nos provar a regularidade de β no intervalo $[c, 2c]$. Temos que $s \in [c, 2c]$,

$$\beta'(s) = \alpha'(s - c) - 2N'(s - c).$$

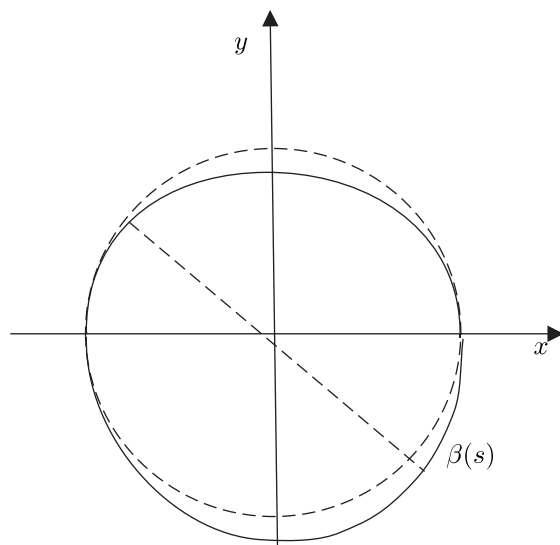
Usando as Equações de Frenet obtemos

$$\beta'(s) = (1 - 2k(s - c))T(s - c).$$

A propriedade (4) da curva α implica que $\beta'(s) \neq 0$. Um cálculo direto nos mostra que a curvatura \bar{k} de β é dado por

$$\bar{k}(s) = \begin{cases} k(s), & \text{se } s \in [0, c], \\ \frac{k(t - c)}{2k(t - c) - 1}, & \text{se } s \in [c, 2c]. \end{cases}$$

A condição (4) implica que $\bar{k} > \frac{1}{2}$. A propriedade (3) nos diz que o índice de rotação de β é igual a um e, portanto, β é estritamente convexa. É imediato vermos que a largura de β é constante e igual a dois.



Vamos provar, em seguida, que o comprimento de uma curva de largura constante \mathbb{L}_0 depende apenas de \mathbb{L}_0 . Esse resultado foi demonstrado originalmente por E. Barbier no século XIX, usando métodos probabilísticos.

Teorema 2.7 (*Teorema de Barbier*) *O comprimento de qualquer curva convexa, regular, fechada, simples e de largura constante \mathbb{L}_0 é igual a $\pi\mathbb{L}_0$.*

Prova. Seja $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com as hipóteses do teorema e positivamente orientada. Pelo Teorema 2.3, como α é fechada, simples e convexa, o índice de rotação de α é igual a um. Considere a extensão periódica $\tilde{\alpha}$ de α , definida em \mathbb{R} por

$$\tilde{\alpha}(s + nL) = \alpha(s), \quad \forall s \in [0, L], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja φ uma determinação diferenciável do ângulo que a indicatriz tangente de $\tilde{\alpha}$, $T(s)$, faz com $(1, 0)$. Visto que o índice de rotação

de α é igual a um, temos

$$\varphi(s + L) - \varphi(s) = 2\pi, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Pela equação (1.22), temos que

$$\varphi'(s) = k(s), \forall s \in \mathbb{R}.$$

Vimos que a curva α é estritamente convexa. Portanto $k(s) > 0$ e φ é estritamente crescente. Logo φ possui inversa diferenciável.

Agora, para cada $s \in \mathbb{R}$, considere a aplicação que a cada $s \in \mathbb{R}$ associa $\bar{\alpha}(s)$, dada por

$$\bar{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}(s) + \mathbb{L}_0 N(s),$$

onde N é o campo normal e unitário ao longo de $\tilde{\alpha}$. Temos, portanto, que $\bar{\alpha}$ é diferenciável, periódica e, para todo $s \in \mathbb{R}$, $\bar{\alpha}(s)$ e $\tilde{\alpha}(s)$ são pontos antípodos. Antes de continuarmos a demonstração do teorema, necessitaremos de seguinte resultado:

Lema 2.2 *Com a notação acima, $\bar{\alpha}$ é uma reparametrização positiva de $\tilde{\alpha}$, isto é, existe uma função diferenciável $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$\bar{\alpha}(s) = \tilde{\alpha} \circ h(s), \forall s \in \mathbb{R}.$$

A função h é tal que $h(s + L) = h(s) + L$, para todo $s \in \mathbb{R}$, e sua derivada é estritamente positiva em todos os pontos.

Prova do lema. Seja h a função, dada por $h(s) = \varphi^{-1}(\varphi(s) + \pi)$. Temos que h é diferenciável, e sua derivada é positiva. Além disso,

$$\varphi \circ h(s) = \varphi(s) + \pi.$$

Observe que $\varphi \circ h(s) = \varphi \circ \varphi^{-1}(\varphi(s) + \pi) = \varphi(s) + \pi$. Portanto, se T é a indicatriz tangente de $\tilde{\alpha}$, temos que

$$\begin{aligned} T(h(s)) &= (\cos(\varphi \circ h(s)), \operatorname{sen}(\varphi \circ h(s))) \\ &= (\cos(\varphi(s) + \pi), \operatorname{sen}(\varphi(s) + \pi)) \\ &= (-\cos(\varphi(s)), -\operatorname{sen}(\varphi(s))) = -T(s). \end{aligned}$$

Então $T \circ h(s) = -T(s)$ e, portanto, $\tilde{\alpha}(s)$ e $\tilde{\alpha}(h(s))$ são pontos antípodas. Assim

$$\bar{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}(h(s)). \quad \square$$

Vamos concluir a prova do Teorema 2.7. Pelo lema anterior,

$$\tilde{\alpha}(s) + \mathbb{L}_0 N(s) = \tilde{\alpha}(h(s)).$$

Derivando essa expressão, obtemos

$$T(s) + \mathbb{L}_0 N'(s) = T(h(s))h'(s).$$

Pela equação (1.8),

$$T(s) - \mathbb{L}_0 k(s)T(s) = T(h(s))h'(s).$$

Visto que $T(h(s)) = -T(s)$, temos

$$(1 - k(s)\mathbb{L}_0 + h'(s))T(s) = 0,$$

o que acarreta

$$h'(s) = k(s)\mathbb{L}_0 - 1.$$

Usando as propriedades da função h e o fato de que o índice de rotação de α é igual a 1, temos que

$$\begin{aligned} L = h(L) - h(0) &= \int_0^L h'(s) ds = \int_0^L (k(s)\mathbb{L}_0 - 1) ds \\ &= \mathbb{L}_0 \left(\int_0^L k(s) ds \right) - L = 2\pi\mathbb{L}_0 - L. \end{aligned}$$

Portanto

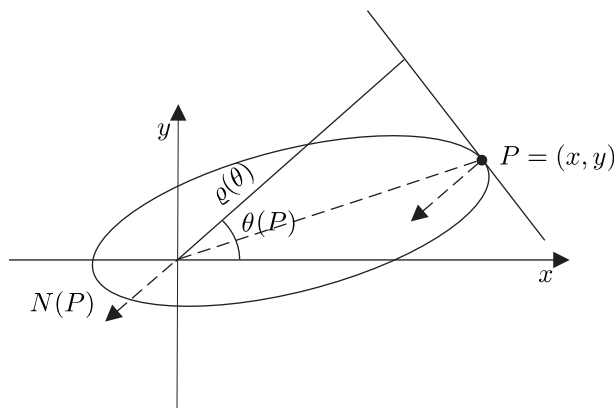
$$L = \pi\mathbb{L}_0. \quad \square$$

2.4 Comprimento e Área de Curvas Convexas

Nesta seção, vamos determinar expressões para medir o comprimento de uma curva estritamente convexa, bem como para a área da região limitada por essa curva. Esses resultados serão consequência de escrevermos a curva usando coordenadas polares tangenciais. Seja C o traço de uma curva regular, fechada, convexa e positivamente orientada em \mathbb{R}^2 . Seja O um ponto na região limitada por C , e escolha o sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de modo que a origem seja o ponto O . Seja $P = (x, y)$ um ponto sobre C , e seja r_P a reta tangente à curva C em P . Considere $\theta(P)$ o ângulo que a reta n_P , perpendicular a r_P e passando por O , faz com o semi-eixo positivo do eixo Ox . Defina $\varrho(\theta)$ como a projeção orientada P sobre n_P . Se $N(P)$ é o campo normal e unitário à curva C , a projeção ϱ é dada por

$$\varrho(\theta) = \langle P, -N(P) \rangle.$$

A função ϱ é também conhecida por função suporte de C .



Vamos descrever a curva C , usando θ como parâmetro. Para obtermos (x, y) como função de θ , observemos que qualquer ponto sobre a reta r_p possui a mesma projeção sobre n_p . Logo $P = (x, y)$ satisfaz

$$\varrho(\theta) = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta.$$

Derivando essa equação em relação a θ e usando que r_p e n_p são perpendiculares, obtemos

$$\begin{aligned} \varrho'(\theta) &= -x \operatorname{sen} \theta + x' \cos \theta + y \cos \theta + y' \operatorname{sen} \theta \\ &= -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} x(\theta) = \varrho(\theta) \cos \theta - \varrho'(\theta) \operatorname{sen} \theta \\ y(\theta) = \varrho(\theta) \operatorname{sen} \theta + \varrho'(\theta) \cos \theta. \end{cases} \quad (2.6)$$

Das expressões acima, segue-se que, dados θ e ϱ , podemos determinar $(x, y) \in C$, e, reciprocamente, as equações em (2.6) também determinam, de modo único, θ e ϱ em função de (x, y) .

Definição 2.5 *O par $(\theta, \varrho(\theta))$ é chamado de coordenadas polares tangenciais de C .*

Vamos agora obter as expressões para o comprimento de arco e para curvatura de C em função de θ . Inicialmente, derivando as equações (2.6),

$$\begin{cases} x'(\theta) = -[\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)] \operatorname{sen} \theta, \\ y'(\theta) = [\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)] \cos \theta. \end{cases}$$

Seja s a função comprimento de arco de C a partir de um ponto $P_0 \in C$. Então s é uma função monótona crescente de θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e, por conseguinte, invertível. Seja $\theta(s)$ a expressão de

θ como função de s . Seja φ uma determinação diferenciável do ângulo que $(x'(s), y'(s))$ faz com o vetor $(1, 0)$. Então

$$\varphi(s) = \theta(s) + \frac{\pi}{2}.$$

Assim

$$\frac{d\theta}{ds}(s) = \varphi'(s) = k(s),$$

onde k é a curvatura de C . Logo

$$\frac{1}{k(s(\theta))} = \frac{ds}{d\theta} = \varrho(\theta) + \varrho''(\theta) > 0. \quad (2.7)$$

Portanto, em termos da função suporte, a curvatura de C é

$$k(\theta) = \frac{1}{\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)}.$$

Se L denota o comprimento de C ,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^L ds = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)] d\theta = \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

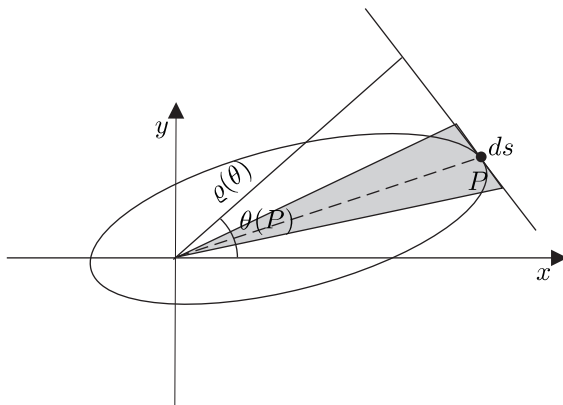
Assim provamos o seguinte resultado:

Teorema 2.8 (*Fórmula de Cauchy*) *O comprimento L de uma curva fechada, regular, simples e estritamente convexa C é dado por*

$$L = \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta,$$

onde ϱ é a função suporte de C .

Seja \mathcal{A} a área da região limitada pela curva C . Para estimar o valor de \mathcal{A} , vamos considerar triângulos com um vértice na origem e o lado oposto a esse vértice, sobre a reta tangente a C em P , tendo comprimento ds , conforme a figura a seguir.



Observe que a altura relativa ao vértice $(0, 0)$ é $\varrho(\theta)$. Portanto a área de cada um desses triângulos é

$$\frac{1}{2} \varrho(\theta) ds.$$

Usando as idéias do Cálculo Diferencial, passando ao limite quando ds tende a zero, obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_C \varrho(\theta(s)) ds.$$

Utilizando a equação (2.7), obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) [\varrho(\theta) + \varrho''(\theta)] d\theta. \tag{2.8}$$

Porém, integrando por partes, temos que

$$\int_0^{2\pi} \varrho(\theta) \varrho''(\theta) d\theta = [\varrho(\theta) \varrho'(\theta)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\varrho'(\theta))^2 d\theta$$

$$= - \int_0^{2\pi} (\varrho'(\theta))^2 d\theta.$$

Substituindo essa expressão em (2.8), obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\varrho^2(\theta) - (\varrho'(\theta))^2] d\theta.$$

Provamos, então, o seguinte resultado:

Teorema 2.9 (*Fórmula de Blaschke*) *A área \mathcal{A} da região limitada por uma curva fechada, regular, simples e estritamente convexa C é dada por*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\varrho^2(\theta) - (\varrho'(\theta))^2] d\theta,$$

onde ϱ é a função suporte de C .

O próximo resultado irá nos dar estimativas do comprimento L e da área \mathcal{A} em função dos valores máximo e mínimo da curvatura de C .

Teorema 2.10 *Seja C uma curva fechada, regular e estritamente convexa. Sejam L o comprimento de C e \mathcal{A} a área da região limitada por C . Então*

$$\frac{2\pi}{k_1} \leq L \leq \frac{2\pi}{k_2}$$

e

$$\frac{\pi}{k_1^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{\pi}{k_2^2},$$

onde k_1 é o valor máximo e k_2 é o valor mínimo da curvatura de C .

Prova. Por (2.7),

$$\frac{2\pi}{k_1} \leq \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta \leq \frac{2\pi}{k_2},$$

o que acarreta

$$\frac{2\pi}{k_1} \leq L \leq \frac{2\pi}{k_2}.$$

Por outro lado, novamente por (2.7) e (2.8),

$$\frac{1}{k_1} \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta \leq 2\mathcal{A} \leq \frac{1}{k_2} \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta.$$

Porém, como

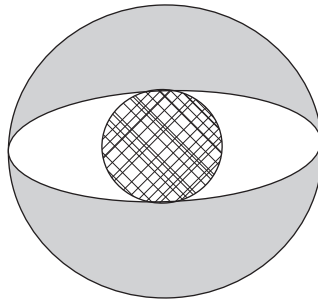
$$\frac{2\pi}{k_1} \leq \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta \leq \frac{2\pi}{k_2},$$

obtemos

$$\frac{\pi}{k_1^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{\pi}{k_2^2}. \quad \square$$

Como consequência imediata desse teorema, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.4 *O comprimento (respectivamente, a área) de uma curva fechada, regular, simples e estritamente convexa está entre o comprimento (respectivamente, a área) dos círculos osculadores de C com maior e menor raio de curvatura.*



Vamos encerrar esta seção, com uma caracterização das curvas de maior comprimento dentre as curvas convexas de diâmetro fixado.

Teorema 2.11 (*A. Rosenthal e O. Szasz-[RS]*) *Dentre todas as curvas convexas, fechadas, regulares, simples e com diâmetro \mathcal{D} , as curvas de largura constante possuem o maior comprimento.*

Prova. Seja C uma curva fechada, convexa e de comprimento L , dada, em coordenadas polares tangenciais, por $(\theta, \varrho(\theta))$. Como ϱ é uma função periódica de período 2π , podemos representá-la, usando Séries de Fourier, por

$$\varrho(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

onde, usando a Fórmula de Cauchy,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta = \frac{L}{\pi}. \quad (2.9)$$

Por outro lado, a integral em (2.9) pode ser escrita como

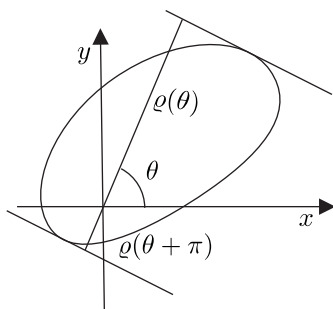
$$\int_0^{2\pi} \varrho(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} [\varrho(\theta) + \varrho(\theta + \pi)] d\theta.$$

Portanto

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\varrho(\theta) + \varrho(\theta + \pi)] d\theta.$$

Observe que, para $\theta \in [0, \pi]$, a largura de C em relação ao vetor unitário que faz ângulo θ com o eixo Ox é dada pela seguinte expressão:

$$[\varrho(\theta) + \varrho(\theta + \pi)].$$



Temos, então, que

$$[\varrho(\theta) + \varrho(\theta + \pi)] \leq \mathcal{D}, \quad \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (2.10)$$

Logo $a_0 \leq \mathcal{D}$ e, conseqüentemente, por (2.9),

$$L \leq \pi \mathcal{D}. \quad (2.11)$$

Além disso, a igualdade na equação anterior ocorre, se e somente se ocorre a igualdade em (2.10) e, portanto, C possui largura constante \mathcal{D} . \square

Como conseqüência da desigualdade (2.11) e da Desigualdade Isoperimétrica, temos o seguinte resultado de L. Bieberbach [Bi].

Proposição 2.8 *Seja \mathcal{C} uma curva de Jordan, estritamente convexa e regular. Seja D o diâmetro de \mathcal{C} e A a área da região limitada por \mathcal{C} . Então*

$$A \leq \frac{1}{4} \pi D^2. \quad (2.12)$$

Além disso, a igualdade se verifica em (2.12), se e somente se \mathcal{C} é um círculo.

Prova. Seja L o comprimento de \mathcal{C} . Pela desigualdade (??), temos que

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Usando (2.11), segue-se que

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} \leq \frac{\pi^2 D^2}{4\pi} = \frac{1}{4}\pi D^2,$$

o que conclui a primeira parte do resultado. O caso da igualdade decorre da classificação da igualdade de (??).

2.5 Curvas Paralelas

Considere $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, fechada e simples. Seja N o campo normal e unitário ao longo de α que aponta para fora da região limitada pelo traço de α . Dado $\zeta \in \mathbb{R}$, a curva paralela à curva α é a curva α_ζ , definida por

$$\alpha_\zeta(t) = \alpha(t) + \zeta N(t), \quad t \in [a, b].$$

Vamos provar que, se α é uma curva estritamente convexa, então α_ζ é uma curva regular, fechada e estritamente convexa, para todo $\zeta > 0$. De fato, se $(\theta, \varrho(\theta))$ são as coordenadas polares tangenciais de α , então a função suporte ϱ_ζ de α_ζ é dada por

$$\varrho_\zeta(\theta) = \varrho(\theta) + \zeta.$$

Assim o raio de curvatura ρ_ζ de α_ζ é determinado por

$$\rho_\zeta(\theta) = \rho(\theta) + \zeta,$$

onde ρ é o raio de curvatura de α . Portanto α_ζ é periódica e sua curvatura é estritamente positiva e, portanto, α_ζ é uma curva fechada e estritamente convexa.

Sejam L_ζ e \mathcal{A}_ζ , respectivamente, o comprimento de α_ζ e a área da região limitada pelo traço da curva α_ζ . Usando as fórmulas de Cauchy e Blaschke, obtemos

$$L_\zeta = L + 2\zeta\pi \tag{2.13}$$

e

$$\mathcal{A}_\zeta = \mathcal{A} + \zeta L + 2\zeta^2\pi, \quad (2.14)$$

onde L e \mathcal{A} são, respectivamente, o comprimento de α e a área da região limitada por α . As equações (2.13) e (2.14) são conhecidas como *Fórmulas de Steiner* para curvas paralelas a uma curva fechada e convexa.

Referências Bibliográficas

- [AM] ASPERTI, A.C. E MERCURI, F.- Topologia e Geometria das Curvas Planas. 13^o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1981.
- [Ar] ARAÚJO, P.V. - Geometria Diferencial. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 1998.
- [AS] - ALENCAR, H. ; SANTOS, W. . Introdução às curvas planas. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 253p .
- [Bi] BIEBERBACH, L. - Uber eine Extremaleeigenschaft des Kreises. Jahrb. Dtsch. Math. Verein., 24 247-250, (1915).
- [Ch] CHERN, S.S. - Curves and Surfaces in Euclidean Spaces. Studies in Global Geometry and Analysis. The Mathematical Association of America, 1967.
- [CJ] COURANT, R, AND JOHN, F - Introduction to Calculus and Analysis Volume 2. Wiley-Interscience Publication. New York, 1974.
- [dC] DO CARMO, M. P. - Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 1976.
- [MR] MONTIEL, S. E ROS, A. - Curvas y Superficies. Proyecto Sur de Ediciones, S.L., 1997.

- [O] OSSERMAN, R. - The four-or-more vertex theorem. Am. Math. Monthly 92 (1985).
- [Ro] RODRIGUEZ, L - Introdução à Geometria Diferencial. 11º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1979.
- [RS] ROSENTHAL E A. SZASZ, O.- Sur le rayon d'une sphère dont la surface contient une curve fermée. C.R. Acad. Sci. Paris, 25 755-757 (1996).
- [Rd] RUDIN, W. - Real & Complex Analysis. Mc Graw-Hill (1978).
- [Ru] RUTTER, J.W. - Geometry of Curves. Chapman & Hall, Mathematics Series 2000.
- [Sc] SCHUR, A - Über die Schwarzsche Extremaleigenschaft des Kreises unter den Kurven Konstanter Krümmung. Math. Ann Bd 5 143-148 (1921).
- [Tv] TVERBERG, H. - A proof of the Jordan curve theorem. Bull. London Math Soc, 12 34-38 (1980).