HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS DE $\mathbb{R}^{2m}$ INVARIANTES POR $SO(m) \times SO(m)$

HILÁRIO ALENCAR

Nesta comunicação caracterizamos as hipersuperfícies mínimas de $\mathbb{R}^{2m}$ que são invariantes pela ação canônica do grupo $SO(m) \times SO(m)$ no $\mathbb{R}^{2m}$. Os resultados aqui enunciados fazem parte da minha tese de doutorado sob a orientação do Professor Manfredo P. do Carmo, a quem sou muito grato.

Os métodos da geometria equivariante permitem reduzir o estudo de tais hipersuperfícies, ao estudo de uma curva geratriz em um plano (espaço de órbitas), a qual satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem.

As curvas geratrizes no espaço de órbitas de tais hipersuperfícies têm os seguintes tipos:

(a) A curva geratriz passa pela origem do espaço de órbitas;

(b) A curva gerratriz não intercepta o bordo do espaço de órbitas;

(c) A curva gerratriz intercepta ortogonalmente o bordo do espaço de órbitas.

O tipo (a) corresponde a uma hipersuperfície que passa pela origem de $\mathbb{R}^{2m}$ e possui uma única singularidade neste ponto. No segundo caso, a hipersuperfície não possui pontos singulartes e é do tipo topológico de um cilindro $S^{m-1} \times S^{m-1} \times \mathbb{R}$ sobre $S^{m-1} \times S^{m-1}$. No terceiro caso, também não existem pontos singulares e uma das esferas S^{m-1} se reduz a um ponto, quando a curva geratriz corta o brodo do espaço de órbitas. Neste caso dizemos quie a hipersuperfície é do tipo topológico A.

Theorem 1. *Seja M^{2m-1} uma hipersuperfície mínima de $\mathbb{R}^{2m}$ invariante por $SO(m) \times SO(m)$ e que passa pela origem de $\mathbb{R}^{2m}$. Então*

M^{2m-1} é o cone quadrático mínimo.

$$C^{2m-1} = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m;\ |X|^2 = |Y|^2\}.$$

O caso em que $m = 2$ no teorema acima foi enunciado sem demonstração por Barbosa e do Carmo.

Theorem 2. *Seja M^{2m-1}, $m = 2, 3$, uma hipersuperfície completa e mínima de $\mathbb{R}^{2m} - \{0\}$ invariante por $SO(m) \times SO(m)$.*

(i) *Se M^{2m-1} é do tipo topológico A, então M^{2m-1} é mergulhada;*

(ii) *Se M^{2m-1} é do tipo topológico de um cilindro $S^{m-1} \times S^{m-1} \times \mathbb{R}$, então M^{2m-1} se auto-intersecta.*

Além disto, a hipersuperfície M^{2m-1}, nos casos (i) e (ii), intersecta o cone quadrático mínimo fora de qualquer compacto, e se aproxima arbitrariamente deste cone.

Theorem 3. *As hipersuperfícies completas e mínimas de $\mathbb{R}^{2m} - \{0\}$, $m \geq 4$, invariantes por $SO(m) \times SO(m)$ com tipo topológico A têm as seguintes propriedades:*

(i) *As hipersuperfícies são mergulhadas;*

(ii) *As hipersuperfícies folheam $\mathbb{R}^{2m}$ menos o cone quadrático mínimo. Em particular as hipersuperfícies são estáveis.*

Hilário Alencar

Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, 57072-900, Maceió-AL, Brasil.

`Email: hilario@mat.ufal.br`