

Escher e Coxeter: Arte e Matemática

Heleno da Silva Cunha
&
Lucas Henrique Rocha de Souza

Maceió - AL

04 e 06 de novembro de 2014

Qual a diferença entre as figuras?

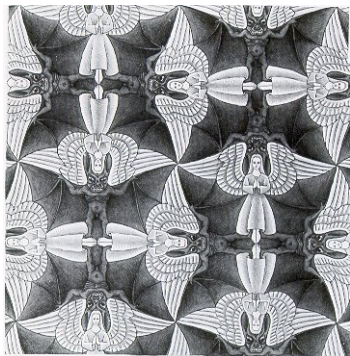


Figura: Angel-devil, 1941

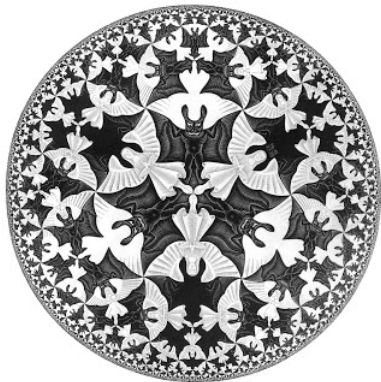


Figura: Limite circular IV, 1960

Definição

Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma ação de G em X é uma aplicação $\psi : G \times X \rightarrow X$, a qual denotaremos por $\psi(g, x) = gx$, com $g \in G$ e $x \in X$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- ❶ Para todos g e h em G , $g(hx) = (gh)x$,
- ❷ Se e é o elemento neutro de G , $ex = x$ para todo x em X .

Definição

Seja $x \in X$. A órbita de x pela ação de G é dada por: $Gx = \{gx : g \in G\}$.

Proposição

A relação estar em uma mesma órbita é uma relação de equivalência.

Definição

O espaço de órbitas X/G é definido como o conjunto de classes de equivalência da relação acima.

Definição

Sejam G um grupo. Uma ação de G em \mathbb{E}^2 ou \mathbb{H}^2 é dita bem comportada se:

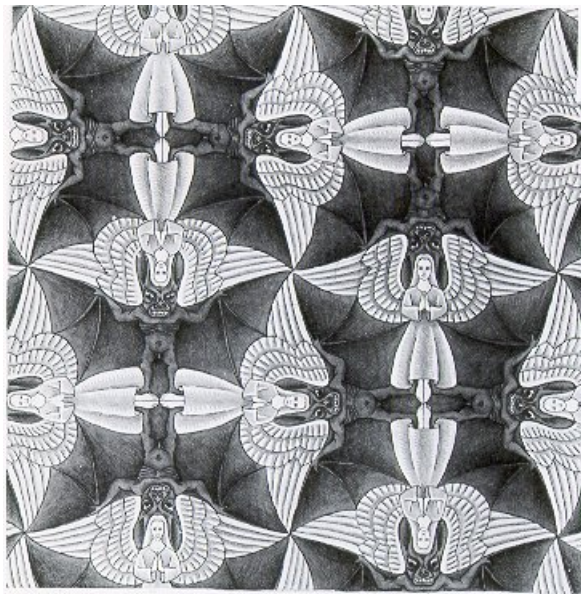
- 1 Para todos g em G , $d(x, y) = d(gx, gy)$, ou seja, G age preservando distâncias,
- 2 O conjunto $\{g \in G : d(x, gx) \leq r\}$ com $r \in \mathbb{R}$, é sempre finito, ou seja, elementos de uma mesma órbita não estão arbitrariamente próximos,

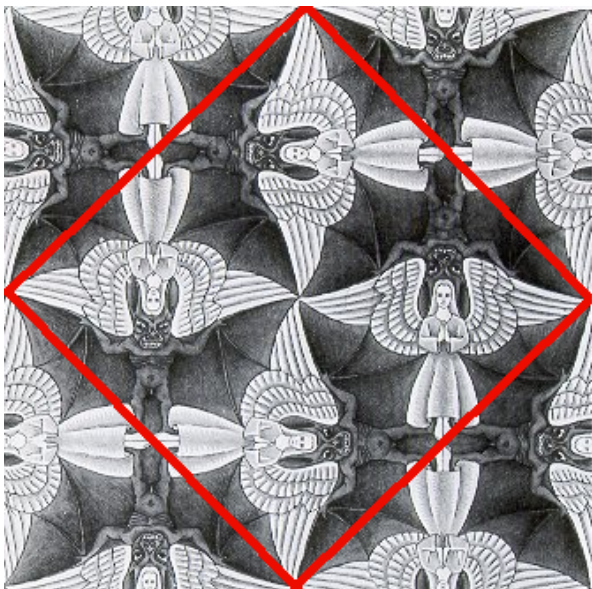
Proposição

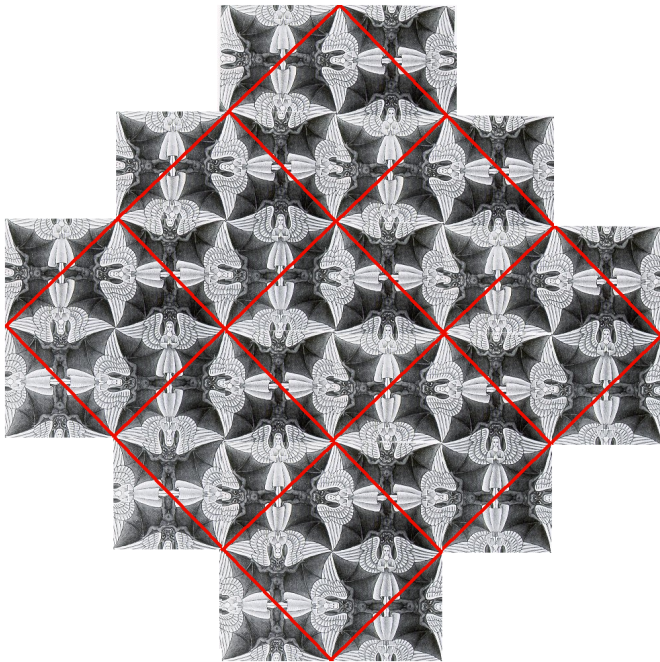
Suponhamos que G age em \mathbb{E}^2 ou \mathbb{H}^2 bem comportadamente. Então $d' : X/G \times X/G \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $d'(Gx, Gy) = \min\{d(a, b) : a \in Gx, b \in Gy\}$, é uma métrica em X/G .



Figura: Lizard, 1942







Toro flat.

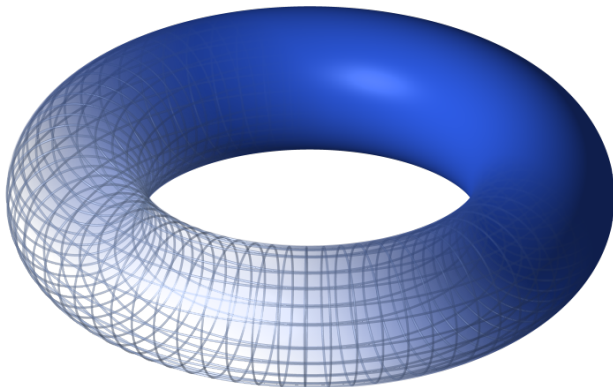


Figura: Imagem meramente ilustrativa

Tesselações do plano hiperbólico.

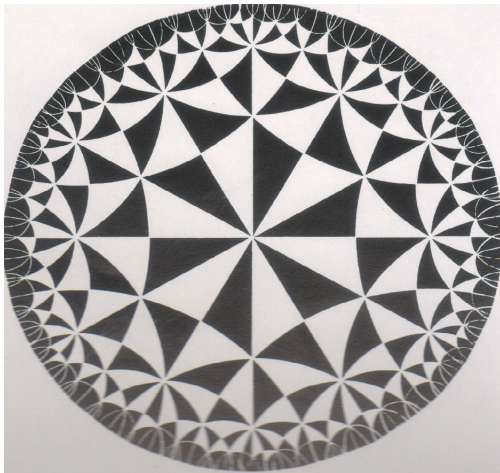


Figura: 246

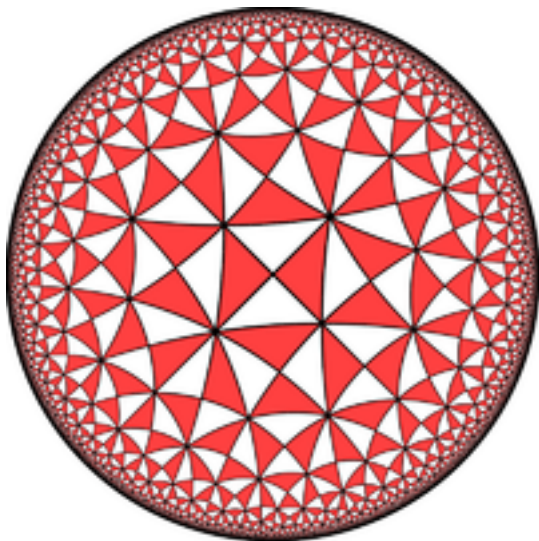


Figura: 245

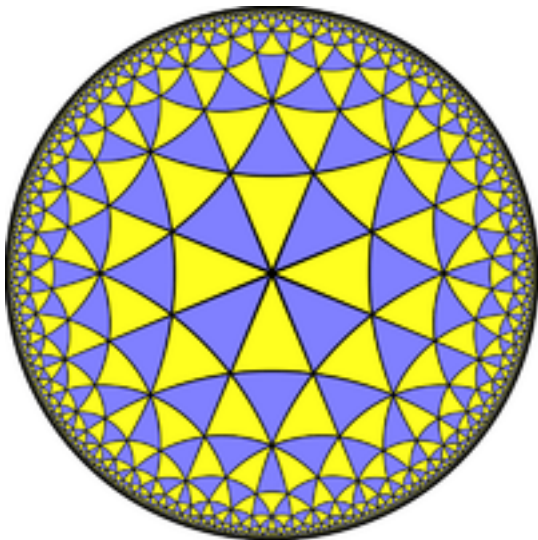


Figura: 334

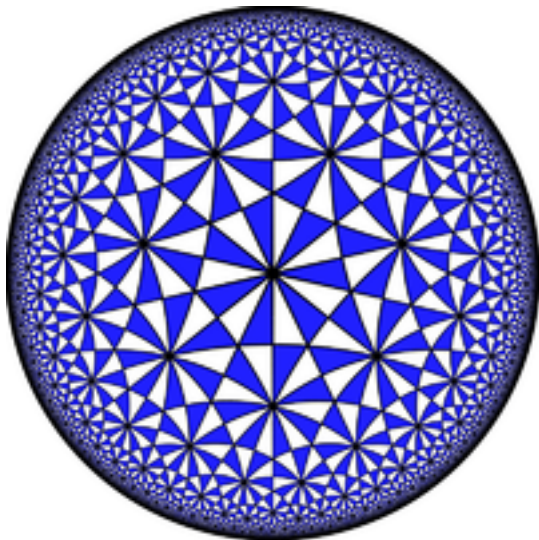
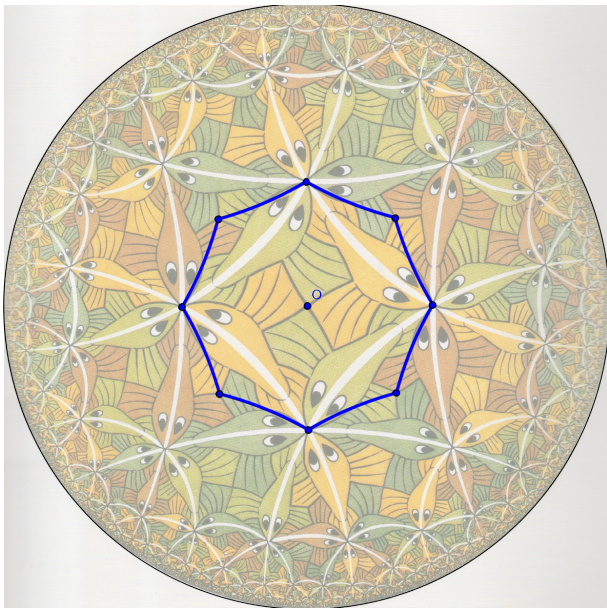
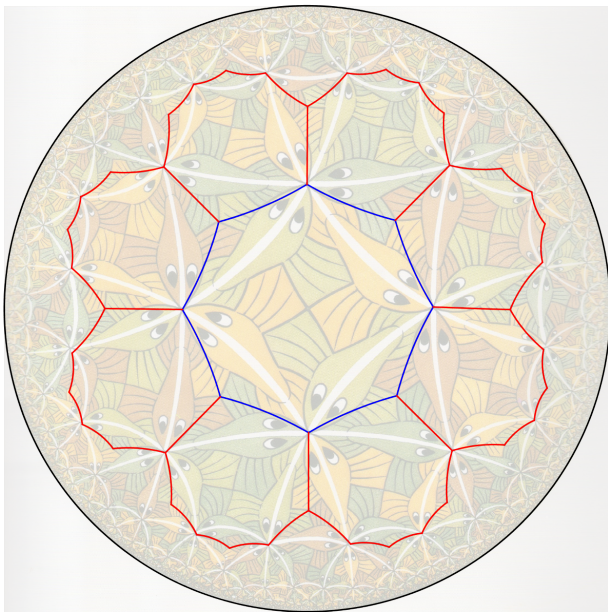
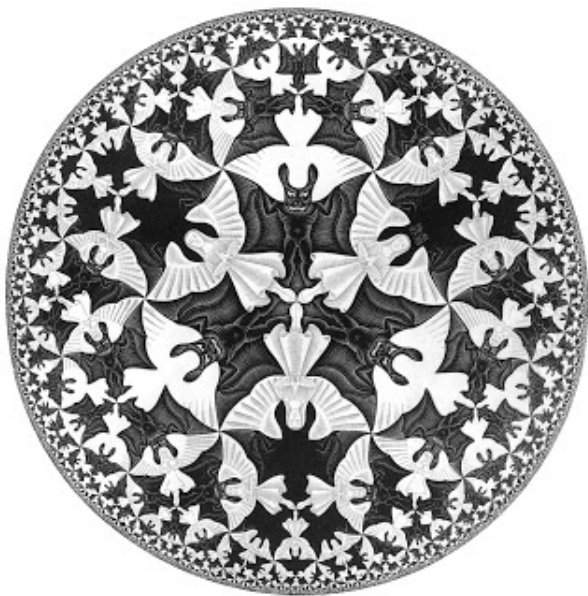


Figura: 237











No plano hiperbólico não existem dilatações.

No plano hiperbólico, semelhança é o mesmo que congruência.

No plano hiperbólico, tesselações precisam ter tamanhos específicos. .

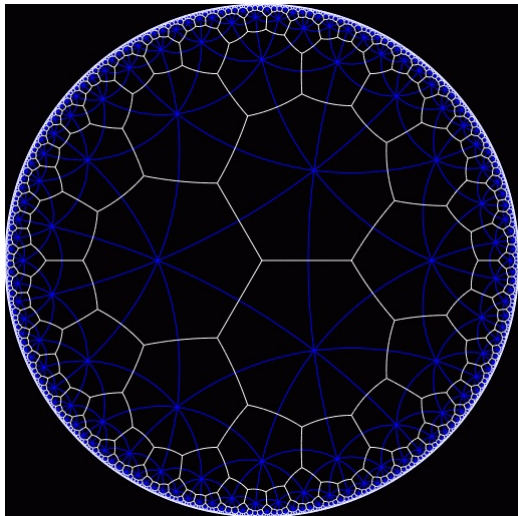
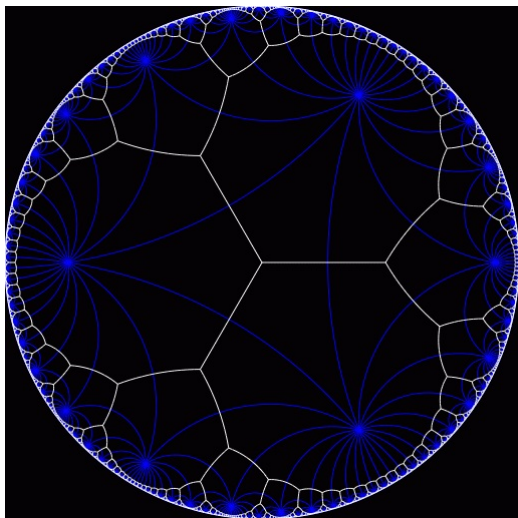


Figura: <http://www.plunk.org/hatch/HyperbolicTesselations>



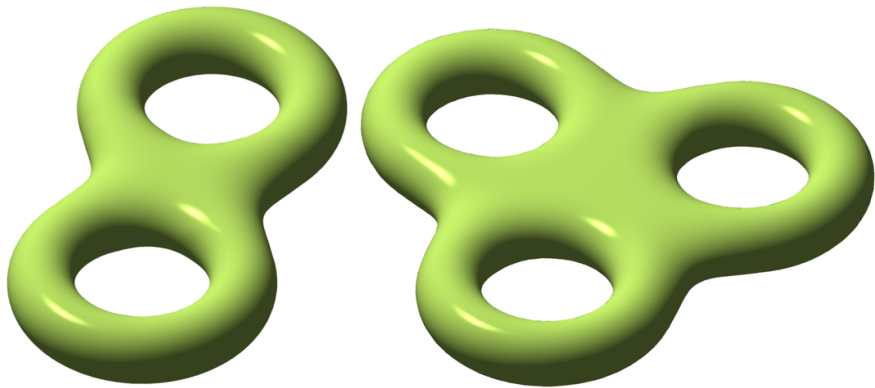


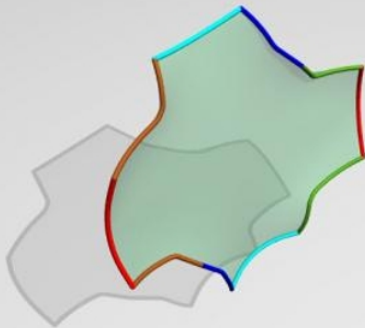
Figura: Hiperbólicos, apesar do desenho

Geometria não Euclidiana - Topologia



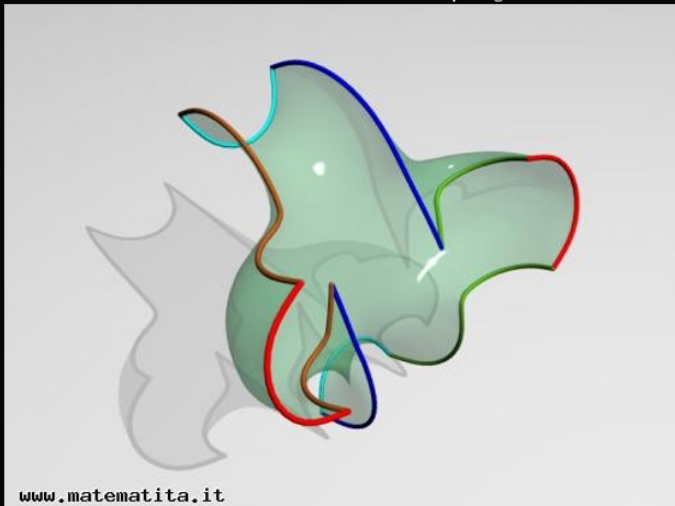
Fonte: www.matematita.it

Geometria não Euclidiana - Topologia

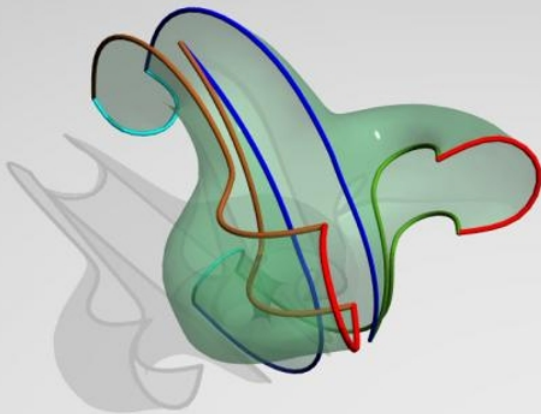


www.matematita.it

Geometria não Euclidiana - Topologia



Geometria não Euclidiana - Topologia



www.matematita.it

Geometria não Euclidiana - Topologia

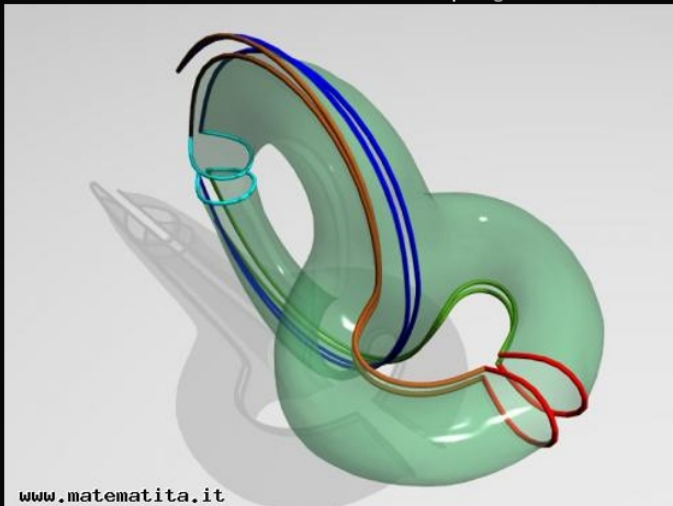




Figura: Tesselação por triângulos ideais.



Figura: Reptiles, 1943