# Escher e Coxeter: Arte e Matemática

Heleno Cunha
&
Lucas Henrique Rocha de Souza

Maceió - AL

04 e 06 de novembro de 2014

J. Saramago:

Cada um de nós vê o mundo com os olhos que tem, e os olhos vêem o que querem, os olhos fazem a diversidade do mundo e fabricam as maravilhas, ainda que sejam de pedra, e altas proas, ainda que sejam de ilusão.

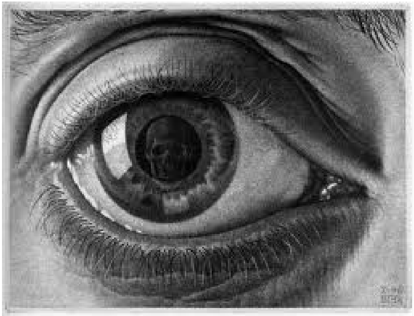


Figura: Olho, gravura à maneira negra, 1946

# Da busca pelo infinito aos limites circulares

**Escher, 1959**

Não podemos imaginar que algures por detras da estrela mais longínqua do céu noturno, o espaço possa ter fim, um limite para além do qual nada mais existe...

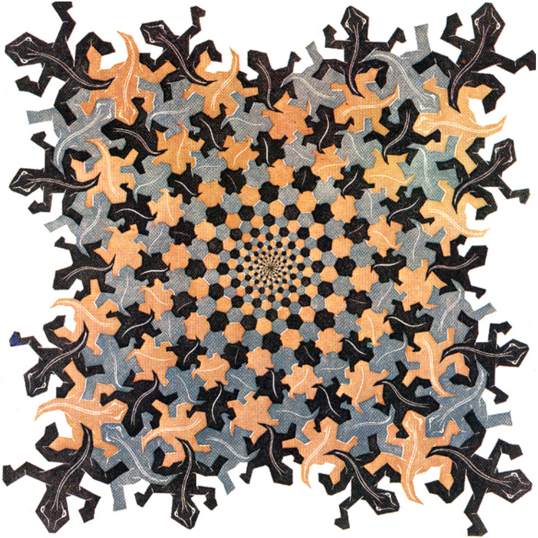


Figura: Evolução II, xilogravura, 1956

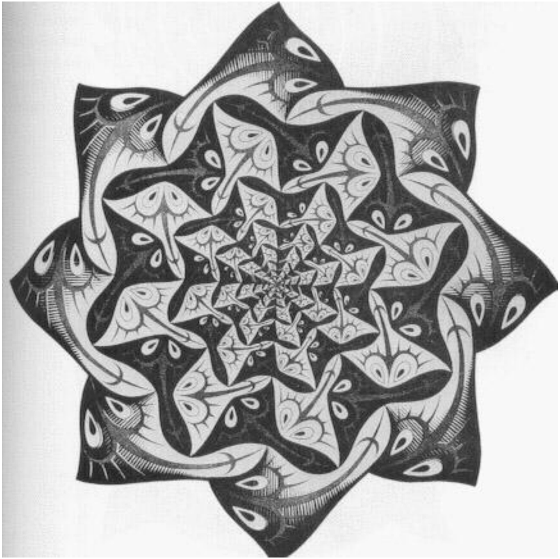


Figura: Caminho da vida, 1957

Figura: Divisão regular da superfície, 1958

Figura: Senda da vida II, xilogravura, 1958

Figura: Cada vez mais pequeno, xilogravura, 1959

# A inspiração para a série limite circular

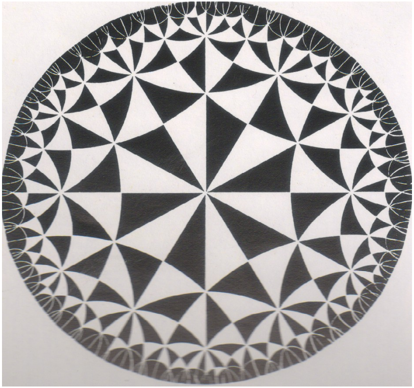


Figura: O desenho de Coxeter

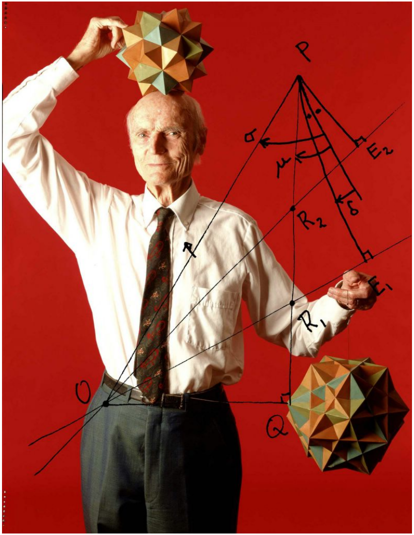



Figura: Coxeter (1907 – 2003)

Figura: Limite Circular I, xilogravura, 1958

Figura: Limite Circular I, xilogravura, 1958

## Escher

"...sendo uma primeira tentativa, mostra um sem número de defeitos. Não só a forma dos peixes, desenvolvidos de abstrações retilíneas em criaturas rudimentares, mas também o seu arranjo, em relação ao todo e a cada um, deixa muito a desejar..."

Figura: Limite Circular II, xilogravura, 1959

Figura: Limite Circular II, xilogravura, 1959

**Escher**

"Na verdade esta versão deveria ser pintada na superfície interior duma semiesfera. Ofereci-a ao Papa Paulo para que ele pudesse decorar com ela o interior da cúpula de São Pedro. Imagine um número infinito de cruzes penduradas por cima da sua cabeça! Mas o Papa não quis!"

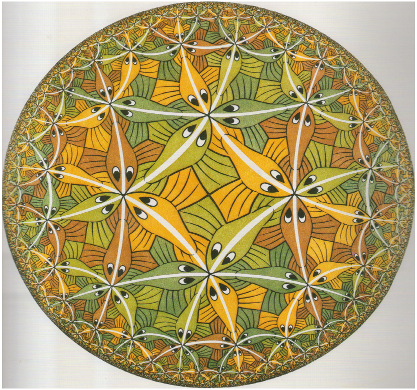


Figura: Limite Circular III, xilogravura, 1959

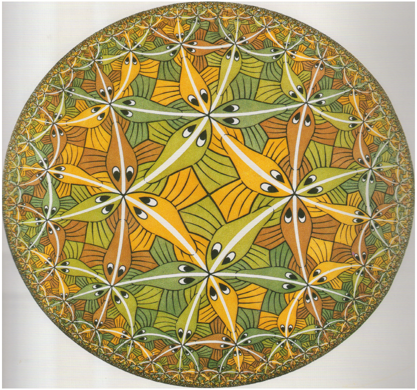


Figura: Limite Circular III, xilogravura, 1959

**Escher**

"...as deficiências do Limite circular I estão aqui consideravelmente eliminadas..."

Figura: Limite Circular IV, xilogravura, 1960

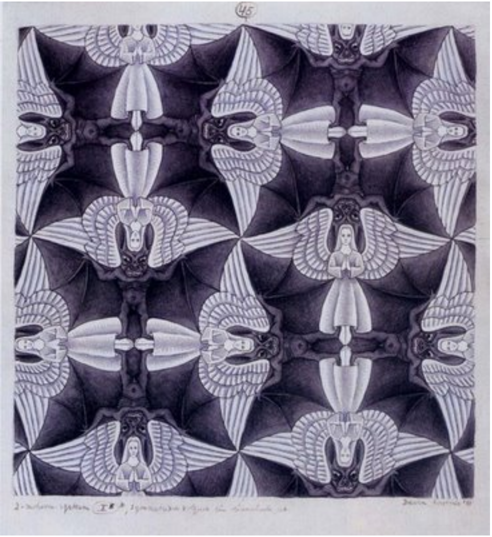



Figura: Anjos e Demônios

Figura: Limite quadrado, xilogravura, 1964

## Escher

*O Limite Quadrado* apareceu depois da série *Limite circular I, II, III e IV*. Isto aconteceu porque o professor Coxeter me chamou a atenção para o método da "*redução de dentro para fora*", o qual anos em vão, tinha procurado. Pois uma redução de fora para dentro (como em *Cada vez mais pequeno*) não traz nenhuma satisfação filosófica porque assim não resulta nenhuma composição logicamente acabada e perfeita.

## Escher

*O Limite Quadrado* apareceu depois da série *Limite circular I, II, III e IV*. Isto aconteceu porque o professor Coxeter me chamou a atenção para o método da "*redução de dentro para fora*", o qual anos em vão, tinha procurado. Pois uma redução de fora para dentro (como em *Cada vez mais pequeno*) não traz nenhuma satisfação filosófica porque assim não resulta nenhuma composição logicamente acabada e perfeita.

## Coxeter

Trata-se de um desenho muito bonito, mas bastante banal e euclidiano, por conseguinte não o considero especialmente interessante. Os *Limites circulares* são mais interessantes, porque são não-euclidianos.

### Escher

*O Limite Quadrado* apareceu depois da série *Limite circular I, II, III e IV*. Isto aconteceu porque o professor Coxeter me chamou a atenção para o método da "*redução de dentro para fora*", o qual anos em vão, tinha procurado. Pois uma redução de fora para dentro (como em *Cada vez mais pequeno*) não traz nenhuma satisfação filosófica porque assim não resulta nenhuma composição logicamente acabada e perfeita.

### Coxeter

Trata-se de um desenho muito bonito, mas bastante banal e euclidiano, por conseguinte não o considero especialmente interessante. Os *Limites circulares* são mais interessantes, porque são não-euclidianos.

### Escher

Tudo isso para mim era chinês, pois era completamente leigo em matemática. Reconheço de boa vontade que a pureza intelectual de uma gravura como *Limite circular III* vai muito além da gravura *Limite quadrado*.

# Euclides (em grego antigo: $E\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\varsigma$, 300 a.C.)

Euclides de Alexandria foi um professor, matemático platônico e escritor possivelmente grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria".

Euclides é a versão aportuguesada que significa "Boa Glória".

# Os elementos

Os Elementos de Euclides é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito em Alexandria por volta de 300 a.C.

# Os elementos

Os Elementos de Euclides é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito em Alexandria por volta de 300 a.C.

Parece que Euclides pretendia reunir três grandes descobertas do seu tempo: a teoria das proporções de Eudoxo (Livro V), a teoria dos irracionais de Teeteto e a teoria dos cinco sólidos regulares.

# Os elementos

Os Elementos de Euclides é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito em Alexandria por volta de 300 a.C.

Parece que Euclides pretendia reunir três grandes descobertas do seu tempo: a teoria das proporções de Eudoxo (Livro V), a teoria dos irracionais de Teeteto e a teoria dos cinco sólidos regulares.

Com a exceção do Sobre a Esfera Movente de Autolycus de Pitane, os Elementos é o tratado grego com tratamento axiomático-dedutivo mais antigo da matemática que sobreviveu ao longo dos tempos.

Foi colocado em tipos primeiramente em Veneza em 1482, é um dos primeiros trabalhos de matemática e ser impresso depois da invenção da prensa móvel e perde somente para a Bíblia em número de edições publicadas, com o número batendo nas mil edições.

Figura: Um fragmento dos Elementos encontrado no final do século XIX entre os Papiros de Oxirrinco, datado de cerca de 100 d.C.

**G. Cantor**

A essência da matemática está em sua liberdade.

### Axioma

s.m. Princípio evidente por si mesmo, particularmente em matemática. O matemático grego Euclídes definiu o axioma como uma noção comum, ou seja, uma afirmação geral aceita sem discussão. Um exemplo de axioma é: "a parte é menor que o todo".

### Postulado

s.m. Princípio ou fato indemonstrável ou não demonstrado, cuja admissão é necessária para estabelecer uma demonstração. (Cf. axioma.)

### Teorema

s.m. Proposição científica que pode ser demonstrada. Enunciado de uma proposição ou de uma propriedade que se demonstra por um raciocínio lógico, partindo de fatos dados ou de hipóteses justificáveis, contidos nesse enunciado.
Obs.: Em grego, originalmente significava "espetáculo" ou "festa".

# Noções comuns e axiomas da geometria euclidiana

## Noções comuns

- ◇ Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais;
- ◇ Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais;
- ◇ Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;
- ◇ Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais;
- ◇ O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

# Noções comuns e axiomas da geometria euclidiana

## Noções comuns

- ◇ Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais;
- ◇ Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais;
- ◇ Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;
- ◇ Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais;
- ◇ O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

## Os postulados de Euclides

I Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos;

II Pode-se continuar qualquer reta finita continuamente em uma reta;

III Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio;

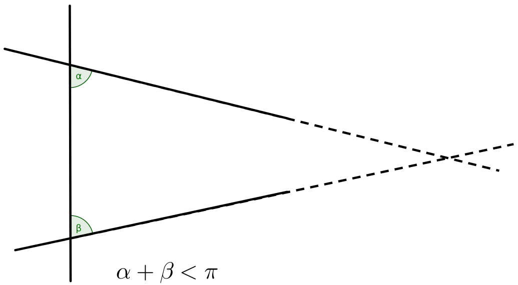
IV Todos os ângulos retos são iguais.

## O V postulado de Euclides

É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

## O V postulado de Euclides

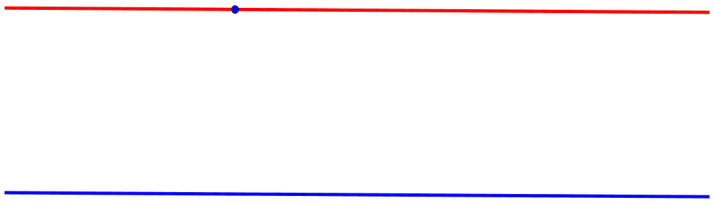
É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.



# Homônimo $\#1$

**$V_1$. (Axioma de Playfair)**

Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.



# Homônimo #2

**$V_2$ (A soma dos ângulos internos de um triângulo)**

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos.

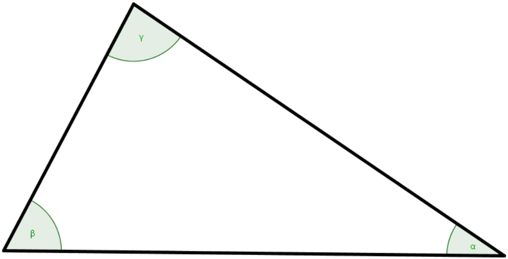



Figura: $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$

# Homônimo #3

**$V_3$ (Existência de retângulos)**

Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último também é reto.


Figura: $\gamma = 90^o$

# Homônimo #4

## $V_4$ (Teorema de Pitágoras)

Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

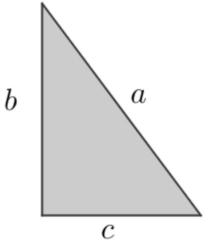



Figura: Teorema de Pitágoras

# Gauss, Bolyai, Lobachevsky

## Os pais da geometria hiperbólica

(a) Gauss (1777 - 1855)

(b) Bolyai (1802 - 1860)

(c) Lobachevsky (1792 - 1856)

## Gauss

... Tenho refletido sobre ele durante 30 anos e não acredito que qualquer outro possa ter pensado mais sobre esta segunda parte, embora eu não tenha publicado nada sobre o assunto. A hipótese de que a soma dos ângulos é menor do que $180^o$ leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente...

### Gauss

... Tenho refletido sobre ele durante 30 anos e não acredito que qualquer outro possa ter pensado mais sobre esta segunda parte, embora eu não tenha publicado nada sobre o assunto. A hipótese de que a soma dos ângulos é menor do que $180^o$ leva a uma geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente...

### Gauss

... Os teoremas desta geometria parecem paradoxais e absurdos para um não iniciado; mas, reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contêm nada de impossível...

# Bolyai

## 1832: Ano de suas primeiras publicações sobre o tema

**Johan Bolyai para seu pai**

... Ainda não cheguei lá, mas já descobri coisas tão maravilhosas que me surpreenderam ... do nada eu criei um novo e estranho universo. Tudo o que lhe enviei anteriormente é como um castelo de cartas de baralho em comparação com uma torre...

# Bolyai

## 1832: Ano de suas primeiras publicações sobre o tema

### Johan Bolyai para seu pai

... Ainda não cheguei lá, mas já descobri coisas tão maravilhosas que me surpreenderam ... do nada eu criei um novo e estranho universo. Tudo o que lhe enviei anteriormente é como um castelo de cartas de baralho em comparação com uma torre...

### Gauss para Wofgang Bolyai

Assim, estou muito surpreso de ter sido poupado deste esforço, e super feliz de que tenha sido o filho do meu velho amigo que passou à minha frente de forma tão extraordinária.

**Johan Bolyai**

Neste admirável trabalho métodos diferentes são utilizados, no entanto, o espírito e os resultados são tão parecidos com aqueles do Apêndice do Tentamen Matheseos que apareceu no ano 1832 em Maros-Vásárhely, que qualquer um que perceba este fato ficará maravilhado.

## Outros personagens

- ◇ G. Saccheri (1667 - 1733)
- ◇ B. Riemann (1826 - 1866)
- ◇ E. Beltrami (1835 - 1900)
- ◇ F. Klein (1849 -1925)
- ◇ H. Poincaré (1854 - 1912)
- ◇ Entre muitos outros...

**O V postulado da geometria hiperbólica**

Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.

# Homônimo #1

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos.

# Homônimo #2

Não existe um par de retas equidistantes.

# Homônimo #3

Existem três pontos não colineaneares que não estão contidos num círculo.

# Homônimo #4

Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então, o último é agudo.

### Modelos de geometria

- Klein;
- Disco de Poincaré;
- Semi-plano superior;
- Hiperbolóide;
- Projetivo.

# Modelo do disco

## Disco unitário

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$$

# Exemplo

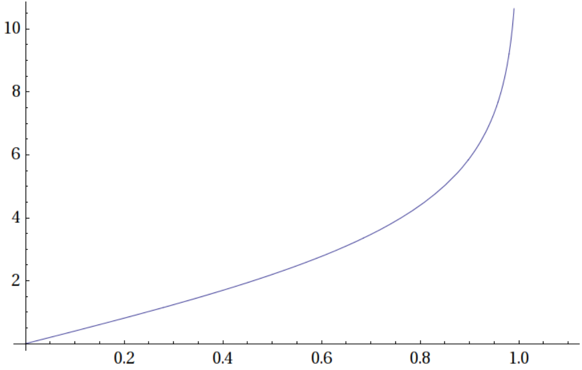
$$\gamma(t) = te^{\theta i} = t\cos\theta + ti\sin\theta$$

$$\begin{aligned} |\gamma(t)|^2 &= t^2 \\ \gamma'(t) &= \cos\theta + i\sin\theta \\ |\gamma'(t)| &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_a^b \frac{2}{1-t^2}dt \\ &= \ln\frac{1+s}{1-s}\Big|_a^b \\ &= \ln\frac{1+b}{1-b} - \ln\frac{1+a}{1-a} \end{aligned}$$

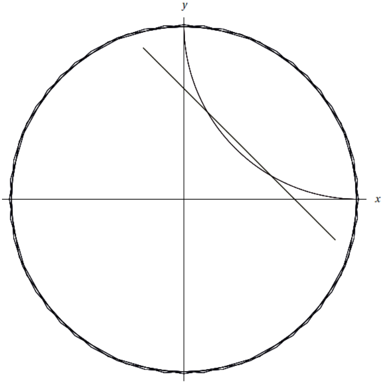
Em particular, quando $b = \varepsilon$ e $a = -\varepsilon$. Temos que

$$\ell(\gamma) = 2 \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$



# Exemplo

$$\sigma(s) = [1-t]\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) + [t]\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$




$$\tau(t) = (\cos(t)+1, \sin(t)+1)$$

## Comprimentos hiperbólicos

$$\ell(\sigma) = \int_0^1 \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \frac{4\sqrt{2}\ \mathrm{arctanh}(\sqrt{2/3-1})}{\sqrt[4]{3}} \sim 1,78 \text{ (segmento)}$$

$$\ell(\tau) = \int_0^1 \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \ln 2 - 2\ln(\sqrt{3}-1) \sim 1,31 \text{ (arco)}$$

### Comprimentos hiperbólicos

$$\ell(\sigma) = \int_0^1 \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \frac{4\sqrt{2}\ \mathrm{arctanh}(\sqrt{2/3-1})}{\sqrt[4]{3}} \sim 1,78 \text{ (segmento)}$$

$$\ell(\tau) = \int_0^1 \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \ln 2 - 2\ln(\sqrt{3}-1) \sim 1,31 \text{ (arco)}$$

### Comprimentos euclidianos

segmento $= 0{,}51$

arco $= \pi/6 \sim 0,52$

# Fórmulas de distâncias e áreas

- $d(z, w) = \inf\{\ell(\sigma) \mid \sigma : [a, b] \to D;\ \sigma(a) = z,\ \sigma(b) = w\}$

# Fórmulas de distâncias e áreas

- $d(z, w) = \inf\{\ell(\sigma) \mid \sigma : [a, b] \to D;\ \sigma(a) = z,\ \sigma(b) = w\}$

- $\cosh^2 \dfrac{d(z, w)}{2} = \dfrac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$;

# Fórmulas de distâncias e áreas

- $d(z,w) = \inf\{\ell(\sigma) \mid \sigma : [a,b] \to D;\ \sigma(a) = z,\ \sigma(b) = w\}$

- $\cosh^2 \dfrac{d(z,w)}{2} = \dfrac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)};$

- $d(z,w) = \ln \dfrac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|};$

# Fórmulas de distâncias e áreas

- $d(z,w) = \inf\{\ell(\sigma) \mid \sigma : [a,b] \to D;\ \sigma(a) = z,\ \sigma(b) = w\}$
- $\cosh^2 \dfrac{d(z,w)}{2} = \dfrac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$;
- $d(z,w) = \ln \dfrac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}$;
- Comprimento de uma circunferência de raio $r$: $2\pi \sinh r$;
- Área de círculo de raio $r$: $4\pi \sinh^2(\frac{1}{2} r)$

# Grupo de isometrias. Geodésicas

## Grupo de isometrias

$$z \mapsto \frac{az+\bar{c}}{\bar{c}z+\bar{a}} \quad , \quad z \mapsto \frac{a\bar{z}+\bar{c}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{a}}$$

$$|a|^2 - |c|^2 = 1$$

# Grupo de isometrias. Geodésicas

## Grupo de isometrias

$$z \mapsto \frac{az+\bar{c}}{\bar{c}z+\bar{a}} \quad , \quad z \mapsto \frac{a\bar{z}+\bar{c}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{a}}$$

$$|a|^2 - |c|^2 = 1$$

## Geodésicas

Arcos de circunferências ortogonais à fronteira e diâmetros

## Área de triângulo

$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

## Distância de ponto à geodésica

$$\sinh d(z, c) = \frac{2|\mathrm{Im}(z)|}{1 - |z|^2}$$

# Trigonometria

# Trigonometria

## Lei dos senos

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

# Trigonometria

### Lei dos senos

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

### Lei dos cossenos

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

# Trigonometria

## Lei dos senos

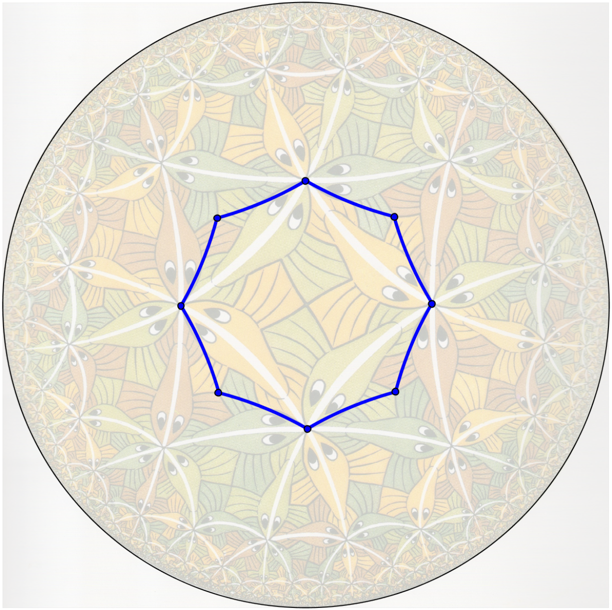
$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

## Lei dos cossenos

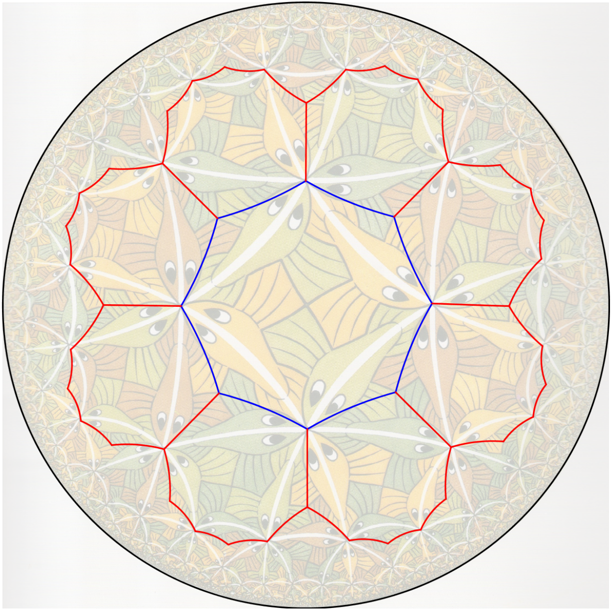
$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

## Teorema de Pitágoras

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$



Figura



Figura

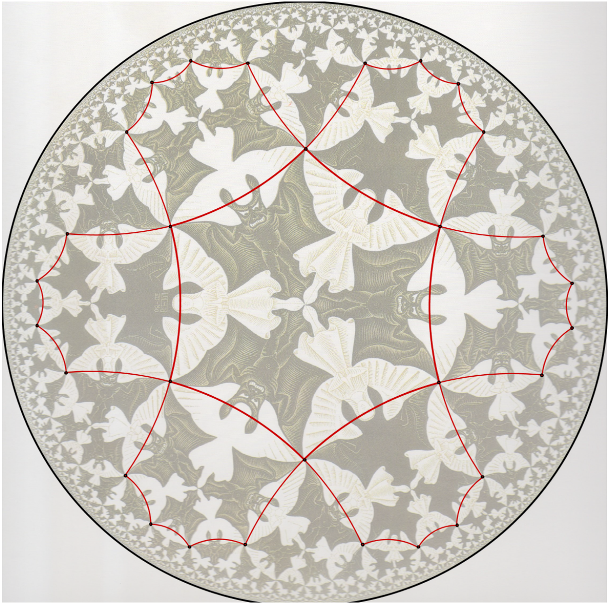
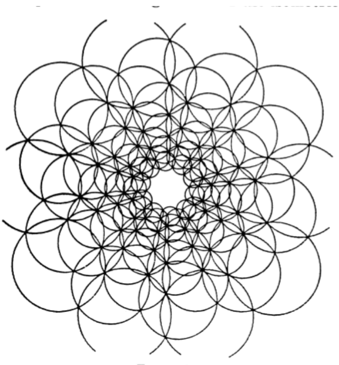


Figura: Borboletas

# ????????????????????????????????????????????????????



(a)

(b)